AL420 Teoria Algebrica dei Numeri
A.A. 2016/2017
Prof. Stefania Gabelli

Numeri algebrici. Ampliamenti algebrici semplici di un campo numerico. Ampliamenti quadratici. Ampliamenti ciclotomici. Ampliamenti finitamente generati. Il Teorema dell'Elemento Primitivo. Elementi coniugati. Isomorfismi in C.

Richiami di Teoria dei Moduli. Ideali frazionari. Operazioni tra ideali. Moduli liberi finitamente generati: basi e rango. Cambiamento di base.

Gruppi abeliani liberi di rango finito. Ogni sottogruppo di un gruppo abeliano libero di rango finito è libero. Quozienti di un gruppo abeliano libero.

Interi algebrici. Definizioni equivalenti. Norma e Traccia di un numero algebrico. L'anello degli interi di un campo quadratico. L'anello degli interi di un ampliamento ciclotomico.

Basi intere. Esistenza di basi intere. Un algoritmo per la ricerca di basi intere.

Il discriminante di un campo numerico. Formule per il calcolo del discriminante. Il discriminante di un ampliamento quadratico. Il discriminante di un ampliamento ciclotomico.

Ideali negli anelli di interi algebrici e loro basi intere: caso quadratico.

Gli anelli di interi algebrici sono noetheriani, integralmente chiusi, di dimensione uno.

Richiami sulle proprietà aritmetiche di un dominio: domini euclidei, principali, di Bezout, a fattorizzazione unica, con massimo comune divisore. Il caso noetheriano di dimensione uno.

Cenni sulla fattorialità degli interi quadratici. Come effettuare la divisione euclidea (quando possibile).

Il gruppo delle unità di un anello di interi quadratici. Unità fondamentali. Enunciato del teorema delle unità di Dirichlet.

Esempi espliciti di domini principali e non principali nel caso quadratico e ciclotomico.

Norma di un ideale: definizioni equivalenti e prime proprietà. La norma di un ideale primo. Esistono un numero finito di ideali con norma fissata. Ogni ideale è contenuto in un numero finito di ideali (primi).

In un anello di interi algebrici ogni ideale non nullo è invertibile ed ogni ideale proprio è prodotto di ideali primi univocamente determinati. La norma di ideali è una funzione moltiplicativa.

Ideali primi negli anelli di interi algebrici: grado e indice di ramificazione. Un metodo di calcolo (Teorema di Dedekind). Esempi di primi inerti, ramificati e decomposti. La relazione $n = e_1 f_1 + \ldots + e_g f_g$. Caso degli ampliamenti di Galois.

Studio della ramificazione negli anelli di interi quadratici e ciclotomici. Come fattorizzare un ideale in ideali primi.

Il gruppo delle classi. Finitezza del gruppo delle classi di un anello di interi algebrici. Calcolo di esempi.

Cenni sulla dimostrazione di Kummer dell'ultimo teorema di Fermat per i primi regolari.

Testi consigliati

[1] H. Pollard - H. G. Diamond, *The Theory of Algebraic Numbers*. Carus Math. Monographs, AMS, (1974).

[2] I. N. Stewart - D. O. Tall, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*. A. K. Peters Ltd, (2002).

[3] S. Gabelli, *Il problema della fattorizzazione nei domini di Dedekind*.
appunti in rete: www.mat.uniroma3.it/users/gabelli/fattorizzazione.pdf, (2010).

Modalità d'esame

- valutazione in itinere ("esoneri")		■ SI	□ NO
- esame finale	scritto	■ SI	□ NO
	orale	■ SI	□ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		■ SI	□ NO

L'esame consiste di una prova scritta finale e di una prova orale. Per gli studenti che sostengono l'esame nell'Appello A o B la prova orale può consistere nell'esposizione di un seminario.

Gli studenti che non hanno frequentato il corso debbono prenotarsi almeno 10 giorni prima dell'appello d'esame, contattando il docente nell'orario di ricevimento o per e-mail.