Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004
TE1 (Teoria di Galois) - Prof. S. Gabelli
Prima prova di valutazione intermedia, 17 Aprile 2004

1. Sia α una radice del polinomio

$$f(X) := X^4 - 8X^2 + 36 \in \mathbb{Q}[X] \ .$$

Mostrare che il campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\alpha)$ e che il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un gruppo di Klein.

Soluzione: Le radici di $f(X)$ sono $\pm\alpha$, $\pm\beta$, con

$$\alpha^2 = 4 + 2\sqrt{5}i\,, \quad \beta^2 = 4 - 2\sqrt{5}i.$$

Poiché $\alpha^2\beta^2 = 36$, possiamo porre $\alpha\beta = 6$.

Dalle relazioni

$$(\alpha+\beta)^2 = 20\,, \quad (\alpha-\beta)^2 = -4\,,$$

si ottiene

$$\alpha = \sqrt{5} + i\,, \quad \beta = \sqrt{5} - i.$$

Da cui $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$.

Gli automorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ sono allora quattro, definiti da

$$\sqrt{5} \to \pm\sqrt{5}\,, \quad i \to \pm i.$$

[Alternativamente:

Da $\alpha\beta = 6$, si ottiene $\beta = 6\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.

Poiché $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$, gli automorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ sono quattro, definiti da $\alpha \to \gamma$, dove $\gamma \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$.]

Poiché ogni automorfismo diverso dall'identità ha ordine 2, gli automorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ formano un gruppo di Klein.

2. Sia $\xi \in \mathbb{C}$ una radice primitiva settima dell'unità. Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ dell'elemento $\alpha = \xi^3 + \xi^5 + \xi^6$ ed il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   Soluzione: Sia $\beta = \xi + \xi^2 + \xi^4 = \bar{\alpha}$.

   Le immagini distinte di α sotto gli isomorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$ sono α e β. Perciò il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è

$$(X - \alpha)(X - \beta) = X^2 + X - 2.$$

   [Alternativamente: Notando che $\alpha + \bar{\alpha} = -1$ e $\alpha\bar{\alpha} = -2$, il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è $X^2 + X - 2$.]

   Poiché il grado di ξ su $\mathbb{Q}$ è sei, il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}(\alpha)$ deve avere grado tre.

   Inoltre, le immagini distinte di ξ sotto i $\mathbb{Q}(\alpha)$-isomorfismi di $\mathbb{Q}(\xi)$ in $\mathbb{C}$ sono ξ, ξ^2, ξ^4. Perciò il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}(\alpha)$ è

$$(X - \xi)(X - \xi^2)(X - \xi^4) = X^3 - \beta X^2 + \alpha X - 1.$$

3. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi di grado n e sia $\alpha \in K$. Mostrare che, se esistono n F-isomorfismi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ di K nella chiusura algebrica F' di F (e di K) tali che $\varphi_i(\alpha) \neq \varphi_j(\alpha)$ per $i \neq j$, allora $K = F(\alpha)$.

   Soluzione: Poiché $F \subseteq F(\alpha) \subseteq K$, basta mostrare che α ha almeno grado n su F. Questo segue dal fatto che gli n-valori distinti $\varphi_i(\alpha)$ sono radici del polinomio minimo di α su F.

4. Svolgere in modo conciso ma esauriente uno dei seguenti temi:

   (a) Ampliamenti finiti e finitamente generati;

   (b) Ampliamenti algebrici e chiusura algebrica;

   (c) Ampliamenti ciclotomici.