Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004
TE1 (Teoria di Galois) - Prof. S. Gabelli
Seconda prova di valutazione intermedia, 8 Giugno 2004

1. Determinare tutti i sottocampi dell'ampliamento ciclotomico $\mathbb{Q}(\xi_{22})$, dove ξ_{22} è una radice primitiva 22-sima dell'unità.

   Per ogni sottocampo, determinare poi un elemento primitivo ed il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

   Soluzione: Sia $\xi = \xi_{22}$. Notiamo che $22 = 2 \cdot 11$, con $\mathrm{MCD}(2, 11) = 1$. Inoltre $\xi^2 = \zeta$ è una radice primitiva 11-sima dell'unità e $\xi^{11} = -1$. Poiché $1 = 11 - 2 \cdot 5$, si ha $\xi = \xi^{11-2\cdot 5} = -(\xi^2)^{-5} = -\zeta^{-5}$. Dunque $\mathbb{Q}(\xi) = \mathbb{Q}(\zeta)$.

   Poiché il gruppo di Galois G di $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ su $\mathbb{Q}$ è ciclico di ordine 10, allora K ha esattamente due sottocampi propri. Precisamente, il campo fisso del sottogruppo di G di ordine 5 (e indice 2) ha grado 2 su $\mathbb{Q}$ ed è il sottocampo $\mathbb{Q}(i\sqrt{11})$, ottenuto aggiungendo a $\mathbb{Q}$ una radice del discriminante. Il polinomio minimo di $i\sqrt{11}$ su $\mathbb{Q}$ è $X^2 + 11$.

   Il sottogruppo di G di ordine 2 (e indice 5) è generato dal coniugio. Perciò il suo campo fisso ha grado 5 su $\mathbb{Q}$ ed è $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$.

   Posto $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$, si ha:

   $\alpha^2 = (\zeta^2 + \zeta^{-2}) + 2;$

   $\alpha^3 = (\zeta^3 + \zeta^{-3}) + 3\alpha;$

   $\alpha^4 = (\zeta^4 + \zeta^{-4}) + 4\alpha^2 - 2;$

   $\alpha^5 = (\zeta^5 + \zeta^{-5}) + 5\alpha^3 - 5\alpha.$

   Poiché ζ è radice dell'11-simo polinomio ciclotomico, risulta:

   $$(\zeta + \zeta^{-1}) + (\zeta^2 + \zeta^{-2}) + (\zeta^3 + \zeta^{-3}) + (\zeta^4 + \zeta^{-4}) + (\zeta^5 + \zeta^{-5}) + 1 = 0\,.$$

   Da cui:

   $$\alpha^5 + \alpha^4 - 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0$$

   Poiché α ha grado 5 su $\mathbb{Q}$, il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è:

   $$X^5 + X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 3X + 1\,.$$

Alternativamente, il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ si può determinare osservando che le sue radici sono i coniugati di α.

2. Mostrare che il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio

$$f(X) := X^5 - 4X + 2$$

è isomorfo a $\mathbf{S_5}$.

Il polinomio $f(X)$ è risolubile per radicali?

<u>Soluzione</u>: Il polinomio $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$ per il Criterio di Eisenstein ($p = 2$).

Lo studio della funzione reale $Y = f(X)$ mostra che il polinomio $f(X)$ ha esattamente tre radici reali e 2 radici non reali, coniugate.

Il gruppo di Galois di $f(X)$ si può identificare a un sottogruppo G di $\mathbf{S_5}$. Poiché il polinomio $f(X)$ è irriducibile, 5 divide l'ordine di G. Perciò G contiene un elemento di ordine 5 (Teorema di Cauchy), ovvero un 5-ciclo. Inoltre G contiene una trasposizione, corrispondente al coniugio. Dunque $G = \mathbf{S_5}$.

Poiché il gruppo $\mathbf{S_5}$ non è risolubile, allora $f(X)$ non è risolubile per radicali.

3. Sia $f(X) \in F[X]$ un polinomio di quarto grado irriducibile su F ($\mathrm{char}(F) = 0$). Stabilire quali possono essere i gruppi di Galois di $f(X)$ quando il discriminante di $f(X)$ è un quadrato in F.

<u>Soluzione</u>: Se $G \subseteq \mathbf{S_4}$ è il gruppo di Galois di $f(X)$ su F e $\delta^2 = D(f)$, il gruppo di Galois di $f(X)$ su $F(\delta)$ è $G \cap \mathbf{A_4}$.

Notiamo che:

$$D(f) \text{ è un quadrato in } F \Leftrightarrow \delta \in F \Leftrightarrow F = F(\delta) \Leftrightarrow G \subseteq \mathbf{A_4}.$$

Poiché $f(X)$ è irriducibile, l'ordine di G è diviso da 4. Allora, se $D(f)$ è un quadrato in F, i possibili gruppi di Galois di $f(X)$ su F sono i sottogruppi di $\mathbf{A_4}$ il cui ordine è diviso da 4, cioè $\mathbf{A_4}$ e $\mathbf{V_4}$.

($G = \mathbf{A_4}$ se la risolvente cubica di $f(X)$ è irriducibile e $G = \mathbf{V_4}$ se è riducibile).

4. Svolgere in modo conciso ma esauriente uno dei seguenti temi:

    (a) Costruzioni con riga e compasso;

    (b) Ampliamenti di Galois;

    (c) Il gruppo di Galois di un polinomio.