Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004

TE1 (Teoria di Galois) - Prof. S. Gabelli
Prima prova di esame, 17 Giugno 2004

1. Costruire un campo K con 81 elementi.

   Se p è la caratteristica di questo campo, stabilire se esistono polinomi irriducibili su $\mathbb{Z}_p$ di grado $2, 3, 4$ che hanno radici in K.

   Soluzione: Poiché $81 = 3^4$, il campo K è il campo di spezzamento di ogni polinomio di grado 4 irriducibile su $\mathbb{Z}_3$, ovvero di ogni fattore irriducibile di grado 4 del polinomio $p(X) = X^{81} - X \in \mathbb{Z}_3[X]$. Inoltre K è costituito esattamente dalle radici di $p(X)$.

   Se ad esempio
   $$f(X) = X^4 + X + 2,$$
   allora $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}_3$ e
   $$K = \frac{\mathbb{Z}_3[X]}{(f(X))} \cong \mathbb{Z}_3(\alpha)\,,$$
   dove α è la classe di X in K.

   Se $g(X) \in \mathbb{Z}_3[X]$ ha grado n ed è irriducibile, ogni sua radice β ha grado n su $\mathbb{Z}_3$. Se $\beta \in K$, n divide $[K : \mathbb{Z}_3] = 4$. Dunque non può essere $n = 3$. D'altra parte, ogni polinomio di grado 2 ha radici in K, perché divide $p(X)$.

2. Costruire un polinomio di quinto grado irriducibile su $\mathbb{Q}$ che ha tutte radici reali. Qual è il gruppo di Galois di questo polinomio?

   Soluzione: Per ogni primo p, posto $\xi = \xi_p$, il p-esimo ampliamento ciclotomico $\mathbb{Q}(\xi)$ ha gruppo di Galois ciclico, di ordine $p - 1$.

   Se $\alpha = \xi + \xi^{p-1}$, si ha $\mathbb{Q}(\xi) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\alpha)$. Inoltre $\mathbb{Q}(\alpha)$ ha grado $\frac{p-1}{2}$ su $\mathbb{Q}$ ed è normale. Dunque tutte le radici del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$, che ha grado $\frac{p-1}{2}$, sono reali.

   Il gruppo di Galois di questo polinomio, essendo un quoziente di un gruppo ciclico, è ciclico.

Per $p = 11$, si ottiene in questo modo un polinomio del tipo richiesto, che è:

$$X^5 + X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 3X + 1$$

ed ha gruppo di Galois ciclico di grado 5 (vedi le soluzioni del 2° Esonero).

3. Determinare tutti gli ampliamenti quadratici contenuti nel 15-simo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$. Quali di questi campi sono reali?

   Soluzione: Poiché $15 = 3 \cdot 5$ e $\mathrm{MCD}(3, 5) = 1$, allora

   $$\mathbb{Q}(\xi_{15}) = \mathbb{Q}(\xi_3, \xi_5)$$

   e

   $$Gal_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi_{15})) = Gal_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi_3)) \times Gal_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi_5)) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4.$$

   Poiché $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ha esattamente tre sottogruppi di indice 2, allora $\mathbb{Q}(\xi_{15})$ ha esattamente tre sottocampi di grado 2 su $\mathbb{Q}$.

   Poiché $\mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_3) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{15})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_5) \subseteq \mathbb{Q}(\xi_{15})$, gli ampliamenti quadratici contenuti in $\mathbb{Q}(\xi_{15})$ sono

   $$\mathbb{Q}(i\sqrt{3}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \quad \mathbb{Q}(i\sqrt{15}).$$

   Di questi, soltanto $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ è reale.

4. Svolgere in modo conciso ma esauriente uno dei seguenti temi:

   (a) Ampliamenti normali;

   (b) Il polinomio generale di grado n;

   (c) Risolubilità per radicali.