**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004**

**TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois**
**Prof. S. Gabelli**

**Tutorato 1 - a cura di G. Armellino**

1. Sia $F$ un campo reale oppure $F = \mathbf{F}_p$ con $p \equiv 3 \bmod (4)$. Mostrare che l'insieme delle matrici

$$\mathcal{M}_{a,b} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \; ; \, a, b \in F \}$$

   è un campo, sottoanello dell'anello delle matrici quadrate di dimensione 2 a coefficienti in $F$.

   Se $F = \mathbf{F}_p$, quanti elementi ha $\mathcal{M}_{a,b}$?

2. Costruire esplicitamente i campi $\mathbb{Q}(\alpha)$ per i seguenti valori di $\alpha$:

$$\sqrt[5]{2}\,, \quad \sqrt{3} + 2i\,, \quad ln(2).$$

3. Costruire esplicitamente i campi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5} + 2i)\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})\,, \quad \mathbb{Q}(\pi, 2 + i).$$

4. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei polinomi

$$X^4 - X^3 + 4X^2 - 3X + 3\,, \quad X^9 - 1\,, \quad X^7 - 2.$$

5. Siano $a$, $b$ due interi positivi. Mostrare che

$$\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b}),$$

   per ogni $x$, $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

6. Determinare l'inverso (razionalizzato) del numero $1 + \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$.