

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Prof. S. Gabelli
Tutorato 10 - a cura di G. Armellino

1. Siano $\rho \in \mathbb{R}, \sigma, \tau$ le radici complesse del polinomio $X^3 - X + 1$.
Mostrare che

$$\sigma + \tau = -\rho; \quad \sigma\tau = -\frac{1}{\rho}.$$

2. Verificare che un polinomio di quarto grado e la sua risolvente cubica hanno lo stesso discriminante.
3. Calcolare il discriminante dei polinomi:

$$X^4 + aX^2 + c; \quad X^4 + bX + c \in \mathbb{Q}[X].$$

4. Stabilire, senza calcolarne le radici, qual è il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:

$$X^3 - 5; \quad X^3 - 21X + 17; \quad X^3 + X^2 - 2X + 1;$$

$$X^4 + 8X + 12; \quad X^4 + 4X^2 - 5; \quad X^4 + X + 1.$$

5. Calcolare il discriminante del polinomio $X^n - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, per $n \geq 2$.
6. Determinare un ampliamento ciclotomico contenente \sqrt{d} , per $d = 3, 6, 11, 12, 15$.
7. Mostrare che, se $MCD(r, s) = 1$, allora
- (1). $\mathbb{Q}(\xi_{rs}) = \mathbb{Q}(\xi_r, \xi_s)$;
- (2). $Gal_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi_{rs})) = Gal_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi_r)) \times Gal_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\xi_s))$.

Inoltre scrivere esplicitamente ξ_{rs} come funzione razionale di ξ_r e ξ_s .