Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004

TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Prof. S. Gabelli

Tutorato 2 - a cura di G. Armellino

1. Sia K un ampliamento quadratico di $\mathbb{Q}$. Mostrare che $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, dove $d \in \mathbb{Z}$ ed è privo di fattori quadratici.

2. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$. Mostrare che

   (a) α è algebrico su F se e soltanto se α^n è algebrico su F .

   (b) Se α ha grado dispari su F, allora α^2 ha lo stesso grado di α.

3. Determinare il grado di $\pi + \frac{1}{\pi}$ su $\mathbb{Q}(\pi^2)$.

4. Sia $c > 0$. Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ del campo di spezzamento del polinomio $X^3 + cX + 1$.

5. Determinare due basi diverse su $\mathbb{Q}$ dei seguenti campi:
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt[3]{2}})\,,$$
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}})\,, \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}}).$$

6. Determinare una base su $\mathbb{Q}$ dei campi di spezzamento dei seguenti polinomi:
$$X^4 + X^2 - 1\,, \quad X^4 + 30X^2 + 45\,, \quad X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

7. Siano $m, n \geq 2$ due interi coprimi. Mostrare che
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}\,\sqrt[m]{3}).$$

8. Mostrare che, per ogni $m, n \geq 2$,
$$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2}),$$
per un opportuno $r \geq 2$.