Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004

TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Prof. S. Gabelli

Tutorato 3 - a cura di G. Armellino

1. Sia K un campo di spezzamento del polinomio $f(X)$ di grado n su F.

   Mostrare che:

   (a) $[K:F]$ divide $n!$;

   (b) se $[K:F]=n!$, allora $f(X)$ è irriducibile su F.

2. Si costruisca un campo di spezzamento K del polinomio

   $$X^6-7X^4+3X^2+3\in F[X]$$

   quando $F=\mathbb{Q}$ oppure $F=\mathbb{Z}_{13}$.

   Si determini inoltre il grado di K su F.

3. Si dimostri che, se $n=2^h$, con $h\geq 2$, le $\varphi(n)$ radici complesse primitive dell'unità non costituiscono una base dell'n-esimo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$.

4. Sia $n\geq 2$ e $\xi_n=\cos(\frac{2\pi}{n})+i\sin(\frac{2\pi}{n})$. Mostrare che $\mathbb{Q}(\xi_n)\subseteq\mathbb{Q}(\xi_{2n})$.

   Mostrare inoltre che vale l'uguaglianza se n è dispari e dare un esempio in cui l'inclusione è stretta.

5. Si costruisca un campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei polinomi

   $$X^2-5,\quad X^5+2.$$

   Si costruisca inoltre il loro composto e se ne determini il grado su $\mathbb{Q}$.

6*. Sia $\alpha\in\mathbb{C}$ algebrico di grado n su $\mathbb{Q}$ e sia $\varphi_\alpha:\mathbb{Q}(\alpha)\longrightarrow\mathbb{Q}(\alpha)$ l'endomorfismo di $\mathbb{Q}(\alpha)$ (come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale) definito da $x\to\alpha x$.

   Mostrare che il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e il polinomio caratteristico di φ_α coincidono.