Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004

TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Prof. S. Gabelli

Tutorato 5 - a cura di G. Armellino

1. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ uno dei seguenti polinomi:

   $X^4 - 9X^2 + 20\,; \quad X^4 - 4X^2 + 2\,; \quad X^4 - 2X^2 - 1\,; \quad X^4 - 7X^2 + 10\,.$

   (a) Stabilire se $f(X)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$;
   (b) Determinare il campo di spezzamento K di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$;
   (c) Trovare un elemento primitivo per K su $\mathbb{Q}$;
   (d) Determinare gli automorfismi di K;
   (e) Determinare la struttura del gruppo $Aut(K)$.

2. Sia $m(X)$ il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\sqrt[3]{5} + i$. Determinare tutte le radici complesse di $m(X)$.

3. Costruire esplicitamente il gruppo degli automorfismi dell'n-simo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$ per $n = 6, 8, 9, 10, 12$ e determinarne la struttura.

4. Sia ξ una radice complessa primitiva settima dell'unità.

   (a) Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\alpha = \xi + \xi^{-1}$;
   (b) Mostrare che le radici di questo polinomio sono tutte reali e stanno in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

5. Determinare il numero dei polinomi di grado 2 irriducibili su $\mathbf{F}_5$.

6. Siano $p(X) = X^2 + X + 1$, $q(X) = X^2 - X + 1 \in \mathbf{F}_5[X]$.

   (a) Mostrare che $p(X)$ e $q(X)$ sono irriducibili su $\mathbf{F}_5$;
   (b) Descrivere gli elementi di $\mathbf{F}_{25}$ in funzione di una radice α di $p(X)$;

(c) Determinare quali tra questi elementi sono le radici di $p(X)$ e $q(X)$;

(d) Determinare quali tra questi elementi sono i generatori di $\mathbf{F}_{25}$;

(e) Determinare il polinomio minimo di ogni generatore di $\mathbf{F}_{25}$;

(f) Determinare quali tra questi elementi sono gli inversi di $\alpha + 1$ e $\alpha + 2$;

(g) Determinare gli automorfismi di $\mathbf{F}_{25}$.

7. Sia K un campo di caratteristica p. Mostrare che, se p non divide n, l'n-simo polinomio ciclotomico su K si ottiene dall'n-simo polinomio ciclotomico $\Phi_n(X)$ su $\mathbb{Q}$ riducendo i coefficienti modulo p.

   (Sugg. Ricordare che la riduzione modulo p induce un omomorfismo $\mathbb{Z}[X] \longrightarrow K[X]$ e procedere per induzione su n).

8. Mostrare che:

   (a) $K := \cup_{n \geq 1} \mathbf{F}_{p^n}$ è un campo;

   (b) K è una chiusura algebrica di $\mathbf{F}_p$.

9. Mostrare che il campo dei numeri reali algebrici non è algebricamente chiuso e determinare una sua chiusura algebrica.