

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica - a.a.2003/2004
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Prof. S. Gabelli
Tutorato 7 - a cura di G. Armellino

1. Sia $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $\chi : \mathbb{Q}(\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ l'omomorfismo di coniugio.
Mostrare che, se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un ampliamento normale, χ è un automorfismo di $\mathbb{Q}(\alpha)$ di ordine 2 e che il campo fissato da $G = \{id, \chi\}$ è $\mathbb{Q}(\alpha + \bar{\alpha}, \alpha \bar{\alpha})$.
2. Sia $f(X) = X^4 + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Determinare esplicitamente un omomorfismo iniettivo di $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f(x))$ in $\mathbf{S}_4$.
3. Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
4. Esplicitare la corrispondenza di Galois per gli ampliamenti ciclotomici $\mathbb{Q}(\xi_8)$ e $\mathbb{Q}(\xi_{10})$.
5. Sia K il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(X) = X^4 - 2$.
Determinare tutti i sottocampi normali di K .
6. Mostrare che i coniugati su $\mathbb{Q}$ di $\cos(\frac{2\pi}{n})$ sono tutti reali.
7. Mostrare che ogni polinomio a coefficienti razionali ha lo stesso gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ di un polinomio monico irriducibile.
8. Determinare un polinomio a coefficienti razionali il cui gruppo di Galois è isomorfo a $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$.