Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2008/2009
Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Prima prova di valutazione in itinere – 7 Aprile 2009

Esercizio 1. Sia $\alpha := \sqrt{\sqrt{5}+2}$.

(i) Dopo aver verificato che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$, si determini il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

(ii) Si determinino le estensioni dei $\mathbb{Q}-$automorfismi di $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ a $\mathbb{Q}-$immersioni di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$, e si stabilisca quali di esse sono $\mathbb{Q}-$automorfismi.

Esercizio 2. Siano $f(X) := X^7 - 2X^4 - 10X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$, $\beta \in \mathbb{C}$ una radice di $f(X)$ e $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva undicesima dell'unità.

(i) Si spieghi perché $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$.

(ii) Si dimostri che $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta^2)$.

(iii) Si dica perché β^2 è algebrico su $\mathbb{Q}$, e si determini il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

(iv) Si stabilisca se l'equazione $f(X) = 0$ ha soluzioni in $\mathbb{Q}(\zeta)$ o in $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$.

Esercizio 3. Siano $f(X) := X^3 + (\sqrt{3} - 2)X^2 + (1 - \sqrt{3})X + 9 - 7\sqrt{3} \in \mathbb{R}[X]$ e $F \subseteq \mathbb{R}$ il campo di definizione di $f(X)$.

(i) Si determinino un campo di spezzamento K di $f(X)$ su F, un campo di spezzamento L di $f(X)$ su $\mathbb{R}$, e si descriva la struttura di $\mathrm{Gal}_F(K), \mathrm{Gal}_{\mathbb{R}}(L)$ (*Suggerimento*: si calcoli $f(\sqrt{3})$...).

(ii) Si determini un polinomio $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ il cui campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ contenga K.

Esercizio 4. Si considerino i polinomi

$$f(X) := X^2 + 2X + 3; \quad g(X) := X^2 + 1; \quad h(X) := X^3 + 2 \in \mathbb{F}_7[X],$$

e siano $F := \mathbb{F}_7[X]/(f(X))$, $K := \mathbb{F}_7[X]/(g(X))$.

(i) Si spieghi perché F e K sono campi isomorfi, e si determinino tutti gli $\mathbb{F}_7-$isomorfismi $F \longrightarrow K$.

(ii) Si dimostri che $h(X)$ è irriducibile in $F[X]$, e si calcoli un campo di spezzamento L del polinomio $f(X)h(X)$ su $\mathbb{F}_7$.

(iii) Si determinino una base di L come $\mathbb{F}_7-$spazio vettoriale e i suoi automorfismi.

Esercizio 5. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi di caratteristica $\neq 2$, e siano $\alpha, \beta \in K$ trascendenti su F.

(i) Si verifichi che almeno uno degli elementi $\alpha - \beta, \alpha + \beta$ è trascendente su F.

(ii) Se $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 1 = 0$, cosa si può dire di $\alpha - \beta$? Quindi si calcoli, usando (i), $[F((\alpha+\beta)^3) : F]$ e $[F(\alpha + \beta) : F((\alpha + \beta)^3)]$.

(iii)* Se $\mathrm{char}(F) = 2$, l'asserzione (i) è vera in generale?

Esercizio 6. Sia $\varepsilon \in \mathbb{C}$ una radice primitiva nona dell'unità e sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva quindicesima. Si stabilisca, motivando la risposta, se i gruppi $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\varepsilon))$ e $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta))$ sono ciclici e/o abeliani.