Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2008/2009
Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Seconda prova di valutazione in itinere – 29 Maggio 2009

Esercizio 1. Siano K un ampliamento di Galois di $\mathbb{Q}$ di grado dispari e $f(X)$ una risolvente di Galois di K su $\mathbb{Q}$. Si dimostri che $f(X)$ si decompone linearmente in $\mathbb{R}[X]$.

Esercizio 2. Si determini un polinomio $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ di grado 6 irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ con tutte radici reali e si descriva l'azione degli automorfismi del gruppo $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ sulle radici di $f(X)$.

Esercizio 3. Sia K il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $X^4 - 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

(i) Si determini un isomorfismo fra $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ e un gruppo noto.

(ii) Si descriva la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq K$.

(iii) Si trovino i sottocampi di K normali su $\mathbb{Q}$, un elemento primitivo per ciascuno di essi.

Esercizio 4. Si dica, motivando accuratamente la risposta, se il gruppo di Galois del polinomio $X^5 - 8X^2 + 2$ contiene un 5-ciclo e/o una trasposizione, e si stabilisca se tale polinomio è risolubile per radicali.

Esercizio 5.

(a) Si dimostri che non esistono ampliamenti biquadratici di un campo finito.

(b) Siano U un'indeterminata su $\mathbb{F}_p$ (p primo), $\alpha \in \mathbb{F}_{p^2} \setminus \mathbb{F}_p$ e $K := \mathbb{F}_p(U)$.

(i) Si dimostri che α è algebrico di grado 2 su K.

(ii) Si dimostri che il polinomio $f(X) := X^2 + UX + U \in K[X]$ è irriducibile in $K[X]$ e separabile su K.

(iii) Detta β una radice di f in qualche chiusura algebrica di K, si dimostri che l'ampliamento $K \subseteq K(\alpha, \beta)$ è di Galois, si determini la struttura di $\mathrm{Gal}_K(K(\alpha, \beta))$ e si deduca che l'asserzione in (a) è falsa se si sostituisce l'ipotesi "campo finito" con "campo di caratteristica positiva p".

Esercizio 6. Sia $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio di quarto grado con tutte radici reali.

(i) Si verifichi che il discriminante $D(f)$ di f è non negativo.

(ii) Si dica quali sono le possibili classi di isomorfismo del gruppo di Galois di f su $\mathbb{Q}$, se $D(f)$ è un quadrato in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 7.* Sia $\mathbb{Q} \subseteq K$ un ampliamento di Galois tale che $[K : \mathbb{Q}] = 42$.

(i) Si dimostri che esiste un campo intermedio L fra $\mathbb{Q}$ e K tale che $[L : \mathbb{Q}] = 6$. Assumendo che L contenga le radici quattordicesime dell'unità, si stabilisca se esiste un elemento primitivo α di K su L che sia radice di $X^7 - l$, per qualche $l \in L$.

(ii) Si dimostri che $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ è risolubile, e se ne determini una serie risolvente ciclica.