Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2008/2009
Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois
Appello A – 5 Giugno 2009

Esercizio 1. Si consideri il polinomio

$$f(X) := X^5 - 2X^3 + X^2 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X].$$

(i) Si determini il gruppo di Galois G di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ e un'immersione di gruppi $\phi : G \longrightarrow S_5$.

(ii) Si determinino i sottocampi del campo di spezzamento K di f su $\mathbb{Q}$, precisando quale/i di essi è/sono reale/i.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio $f(X) := X^p - X - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ (p numero primo). Si dimostri che $f(X)$ è irriducibile e separabile su $\mathbb{F}_p$ e si determini la struttura di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_p}(f(X))$.

Esercizio 3. Siano U un'indeterminata su $\mathbb{C}$, ω una radice primitiva terza dell'unità e $\sigma : \mathbb{C}(U) \longrightarrow \mathbb{C}(U)$ l'omomorfismo di campi definito ponendo $\sigma(f(U)) := f(\omega U)$, per ogni $f(U) \in \mathbb{C}(U)$.

(i) Si dimostri che σ è un automorfismo di $\mathbb{C}(U)$.

(ii) Si determini un elemento primitivo del campo fisso $F := \mathbb{C}(U)^{<\sigma>}$ e si dica se $\mathbb{C}(U)$ è normale su F.

Esercizio 4. Si consideri il polinomio $X^3 + \sqrt[4]{2}X + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[X]$ e siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ le sue radici. Si dimostri che

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\beta^2 + \beta + 1)(\gamma^2 + \gamma + 1) \in \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}).$$

Esercizio 5. Si determini un ampliamento ciclotomico contenente $\sqrt{21}$.

Esercizio 6. Si consideri il polinomio $f(X) := X^4 - 6X^2 + 49 \in \mathbb{Q}[X]$.

(i) Si calcoli il campo di spezzamento K di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.

(ii) Si determini la struttura di $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(K)$ e si illustri la corrispondenza di Galois.

Esercizio 7. Siano p un numero primo, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e K un ampliamento di Galois di $\mathbb{Q}$ tale che $[K : \mathbb{Q}] = 2p^n$.

(i) Si dimostri che K contiene un ampliamento abeliano F normale su $\mathbb{Q}$.

(ii) Si dimostri che l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq K$ è risolubile.