Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 1, a cura di D. Menichetti e F. Libertini

1. Calcolare i lati di un rettangolo la cui area è di 204 m^2 e il cui perimetro è di 80 m.

2. Sia $f(X) = X^3 + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ e siano $\rho \in \mathbb{R}$, σ, τ le sue radici. Mostrare che $\sigma + \tau = -\rho$ e $\sigma\tau = \rho^{-1}$.

3. Mostrare che un polinomio $f(X) \in K[X]$ è irriducibile se e soltanto se lo è la sua forma ridotta.

4. Risolvere le seguenti equazioni di terzo grado usando le formule di Tartaglia-Cardano:
$$X^3 + 9X - 10\,, \quad X^3 + 6X - 20\,, \quad X^3 + 6X - 7.$$

5. Trovare le radici dei seguenti *polinomi reciproci* usando la sostituzione $Y = X + \frac{1}{X}$:
$$X^4 + 2X^3 + 2X + 1\,; \quad X^5 + X^4 + X^3 - X^2 - X - 1.$$

6. Dire quale dei seguenti insiemi sono campi e quali no, giustificando la risposta:
   (a) $\mathbb{Q}[X]/(x^5 + 1)$
   (b) $\mathbb{Q}[X]/(x^5 + 2)$
   (c) $\mathbb{F}_5[X]/(x^2 + 1)$
   (d) $\mathbb{Z}[X]/(x^3 + x + 1)$
   (e) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})[X]/(x^2 - 3)$

7. Sia $f(x) = x^4 + 11x^3 + 15x^2 - 22x - 5 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Decomporre $f(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[X]$.
   (b) Stabilire se $\mathbb{Q}[X]/(f(x))$ è un campo e/o un dominio.

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$ determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale

8. Sia $f(x) = x^3 - 5x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (a) Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $f(\alpha) = 0$. Considerare l'applicazione

   $$v_\alpha : \mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[\alpha]; \quad h(x) \to h(\alpha).$$

   Determinare, motivando in modo esauriente la risposta, se $\mathbb{Q}[\alpha]$ è un campo.

   (b) Trovare gli inversi di $\alpha + 1, \quad \alpha^2 + \alpha + 1, \quad 2 + \alpha, \quad \alpha^3 - 5\alpha \quad \alpha^4$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$.

   (c) Determinare $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ e una base di $\mathbb{Q}(\alpha)$ su $\mathbb{Q}$

   (d) Ripetere i punti (a) e (c) per il polinomio $g(x) = x^3 - 2x - 2$ e trovare gli inversi di $20\alpha, \quad \alpha + 3, \quad \alpha^5, \quad \alpha^3 - 2\alpha$.

9. Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ per:

   (a) $\alpha = 1 + i$

   (b) $\alpha = \sqrt[3]{4}$

   (c) $\alpha = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$

10. Sia $F \subseteq E$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in E$. Determinare il polinomio minimo di α su F nei seguenti casi:

    (a) $E = \mathbb{Q}(\tau)$ con $\tau^3 = 3\tau + 2, \quad F = \mathbb{Q}, \quad \alpha = 2\tau^2 - \tau + 2 \in E$

    (b) $E = \mathbb{F}_7(\rho)$ con $\rho^3 = \rho + 2, \quad F = \mathbb{F}_7, \quad \alpha = 1 + \rho \in E$