**Università degli Studi Roma Tre**
**Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009**
**TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)**
**Tutorato 2, a cura di D. Menichetti e F. Libertini**

1. Sia

$$M_{a,b}(\mathbb{F}_7) = \{M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_7\}$$

   (a) Mostrare che $M_{a,b}(\mathbb{F}_7)$ è un campo e che l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{F}_7 \longrightarrow M_{a,b}(\mathbb{F}_7); \quad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

   è un'immersione.

   (b) Mostrare che $M_{a,b}(\mathbb{F}_7)$ è un ampliamento di grado 2 di $\mathbb{F}_7$.

2. Si consideri l'insieme $A = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ in cui sono definite le seguenti operazioni:

$$(a,b) + (a',b') = (a + a', b + b') \; ; \quad (a,b)(a',b') = (aa' + 3bb', ab' + a'b).$$

   Rispetto a queste operazioni, $A$ è un anello commutativo unitario con zero $(0,0)$ e unità $(1,0)$ ed è anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_5$ con la moltiplicazione scalare definita da

$$c(a,b) = (c,0)(a,b) = (ca, cb).$$

   (a) Dimostrare che l'applicazione

$$\varphi : \mathbb{F}_5[X] \longrightarrow A \text{ definita da } \sum a_i X^i \mapsto \sum a_i (0,1)^i$$

   è un omomorfismo di anelli;

   (b) Determinare il nucleo $Ker\varphi$ e l'mmagine $Im\varphi$ e definire l'applicazione canonica

$$\overline{\varphi} : \frac{\mathbb{F}_5[X]}{Ker\varphi} \longrightarrow Im\varphi$$

   data dal Teorema di Omomorfismo.

(c) Usando il punto precedente, mostrare che $K := Im\varphi$ è un campo, ampliamento di $\mathbb{F}_5$. Determinare inoltre il grado $[K : \mathbb{F}_5]$, una base di $K$ su $\mathbb{F}_5$ e il numero degli elementi di $K$.

3. Sia $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\tilde{\alpha})$ una catena di ampliamenti di campi e sia $\alpha$ trascendente su $\mathbb{Q}$. $\tilde{\alpha}$ può essere algebrico su $\mathbb{Q}$? E su $\mathbb{Q}(\alpha)$?

4. Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[5]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{3})$.

5. Siano $n, m, \geq 2$. Mostrare che esiste un numero naturale $r \geq 2$ tale che $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[m]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2})$.

6. Sia $K = \mathbb{Q}(e, \sqrt{3})$.
   (a) Descrivere esplicitamente gli elementi di $K$.
   (b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}(e)]$ e trovare una base di $K$ su $\mathbb{Q}(e)$.
   (c) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare una base di $K$ su $\mathbb{Q}$.

7. Sia $K = \mathbb{Q}(\pi, 2 + i)$.
   (a) Descrivere esplicitamente gli elementi di $K$.
   (b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}(\pi)]$ e trovare una base di $K$ su $\mathbb{Q}(\pi)$.
   (c) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare una base di $K$ su $\mathbb{Q}$.

8. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{5} + 2i)$.
   (a) Descrivere esplicitamente gli elementi di $K$.
   (b) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare una base di $K$ su $\mathbb{Q}$.
   (c) Dimostrare che $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt{5})$.

9. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{5}, \sqrt[6]{5})$.
   (a) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$.
   (b) Trovare una base di $K$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.

10. Dimostrate che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-3}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{-6}) = \mathbb{Q}(i)$;

11. Sia $K$ un campo e $U$ un'indeterminata su $K$.
    (a) Dimostrare che $\alpha \in K(U)$ è algebrico su $K \Leftrightarrow \alpha \in K$.
    (b) Usando (a) mostrare che $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \pi) : \mathbb{Q}(\pi)] = 2$.