Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 3, a cura di D. Menichetti e F. Libertini

1. Sia K il campo di spezzamento del polinomio $f(X) \in F[X]$ con F un campo e deg($f(X)$)=n.
   (a) Dimostrare che $[K : F] \mid n!$.
   (b) Dimostrare che se $[K : F] = n!$ allora $f(X)$ è irriducibile su F.
2. Sia $f(X) := X^3 + cX + 1 \in \mathbb{Q}[X]$, $c > 0$. Mostrare che il campo di spezamento di $f(X)$ in $\mathbb{C}$ ha grado 6 su $\mathbb{Q}$.
3. Mostrare che il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ di $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$ è $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.
4. Mostrare che i polinomi $x^4 - 9$ e $x^4 - 2x^2 - 3$ hanno lo stesso campo di spezzamento in $\mathbb{C}$.
5. Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{14}, \sqrt{21})$.
   (a) Calcolare $[K : \mathbb{Q}]$ e trovare una base di K su $\mathbb{Q}$.
   (b) Dimostrare che K è il campo di spezzamento del polinomio $f(X) = X^4 - 40X^2 + 64 \in \mathbb{Q}$.
6. Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice primitiva ottava dell'unità.
   (a) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.
   (b) Determinare il grado di $\zeta + \zeta^{-1}$ su $\mathbb{Q}$.
7. Ricordiamo che una radice quinta primitiva dell'unità è
$$\zeta := \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} i.$$
   (a) Posto $\alpha := \sqrt{10+2\sqrt{5}}\, i$, dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{Q}(\alpha)$. Dire perché il grado di $\alpha + \zeta$ su $\mathbb{Q}$ non può essere 3.
   (b) Calcolare il polinomio minimo $m(X)$ di α su $\mathbb{Q}$.
   (c) Verificare che $\mathbb{Q}(\zeta)$ è il campo di spezzamento di $m(X)$ su $\mathbb{Q}$.
8. Mostrare che $\cos(\frac{2\pi}{n})$ è algebrico per $n \geq 1$ e determinare il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ per $n = 7, 9$.
9. Determinare l'n-simo polinomio ciclotomico $\Phi_n(X)$ per $1 \leq n \leq 20$.
10. Calcolare il polinomio minimo della radice primitiva 16-sima dell'unità $\xi_{16} := \cos(\frac{2\pi}{16}) + i\sin(\frac{2\pi}{16})$ su $\mathbb{Q}(i)$.
11. Mostrare che la funzione φ di Eulero assume valori pari, per ogni $n \geq 3$.
12. Fattorizzare $\Phi_n(X)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{R}$.