Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 4, a cura di D. Menichetti e F. Libertini

1. Siano K un campo, $f(X) \in K[X]$ un polinomio irriducibile, L un campo di spezzamento di f su K.
   (a) Dimostare che se $\alpha, \beta \in L$ sono radici di $f(X)$, allora $K(\alpha)$ e $K(\beta)$ sono isomorfi come campi e come K-spazi vettoriali.
   (b) Stabilire, motivando la risposta, se l'asserzione (a) è vera quando $f(X)$ è riducibile.

2. Stabilire se $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono isomorfi come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali e/o come campi.

3. Sia $\varepsilon \in \mathbb{C}$ una radice terza primitiva dell'unità.
   (a) Dimostrare che $\varepsilon\sqrt[3]{3}$ è algebrico su $\mathbb{Q}$ e determinare il suo polinomio minimo $f(X)$ su $\mathbb{Q}$.
   (b) Dedurre che $\mathbb{Q}(\varepsilon\sqrt[3]{3})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ sono isomorfi come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali e come campi, e descrivere esplicitamente un isomorfismo fra essi.
   (c) Determinare un campo di spezzamento K di $(x^2+1)f(X)$ su $\mathbb{Q}$ e calcolare $[K:\mathbb{Q}]$.
   (d) Stabilire, motivando in modo esauriente la risposta, se esiste un polinomio $g(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tale che $g(\sqrt[3]{3}) = 0$ e avente $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ come campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

4. Si consideri il polinomio $f(X) := X^4 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.
   (a) Determinare un campo L contenente una radice α di $f(X)$ tale che $\alpha \notin \mathbb{F}_2$ e un'immersione $\varphi : \mathbb{F}_2 \hookrightarrow L$.
   (b) Dimostare che $f(X)$ si decompone in fattori lineari in $L[X]$.
   (c) Dedurre che $\mathbb{F}_2(\alpha)$ è un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_2$.
   (d) Determinare tutti gli elementi di $\mathbb{F}_2(\alpha)$ e tutti gli automorfismi del gruppo moltiplicativo $G := \mathbb{F}_2(\alpha)^*$.
   (e) Determinare almeno un automorfismo di G che non si estende a un automorfismo del campo $\mathbb{F}_2(\alpha)$.

5. Consideriamo il polinomio $f(X) := X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Sia K un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_2$ e sia $\alpha \in K$ una radice di $f(X)$.
   (a) Verificare che $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$.

(b) Se L è un campo di spezzamento su $\mathbb{F}_2$ del polinomio

$$g(X) := X^4 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X],$$

dire perché i campi K ed L sono isomorfi, e determinare esplicitamente un isomorfismo $\varphi : K \to L$.

6. Determinare tutti gli isomorfismi in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi e stabilire quali tra essi sono automorfismi:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{3}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{3}).$$

7. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi:

   (a) $f(X) = (X^2 - 2)(X^2 + 3)$;

   (b) $f(X) = X^n - 1$, $n \geq 1$;

   (c) $f(X) = X^4 - 2$;

   (d) $f(X) = (X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 5)$;

   (e) $f(X) = X^5 - 2$.

   Costruire inoltre il gruppo di Galois di ogni polinomio $f(X)$ e determinare la sua struttura come gruppo astratto.

8. Mostrare che l'applicazione

$$\Phi : \mathbb{F}_p(X) \longrightarrow \mathbb{F}_p(X)\,; \quad f \mapsto f^p$$

   è un omomorfismo (omomorfismo di Fröbenius), ma non un automorfismo.

9. Determinare il numero dei polinomi di grado 2 irriducibili su $\mathbb{F}_p$.

10. Stabilire se esistono polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_3$ di grado 2 o 3 che si spezzano linearmente sul campo con 27 elementi e in caso affermativo determinarne almeno uno.