Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 5, a cura di D. Menichetti e F. Libertini

IMPORTANTE: per il resto dei prossimi tutorati ξ_n = radice complessa primitiva n-esima dell'unitá.

1. Determinare tutti i $\mathbb{Q}(i)$-automorfismi di $\mathbb{Q}(\xi_{16})$ in $\mathbb{C}$.
2. Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^4 - p$, dove $p \in \mathbb{Z}$ è un elemento irriducibile, ed un sottogruppo di S_4 ad esso isomorfo.
3. Mostrare che il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) = x^4 + x^2 - 1$ è un gruppo diedrale di grado 4. Determinare inoltre tutti i sottocampi normali del campo di spezzamento di $f(x)$.

   Suggerimento: Notare che $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$ è contenuto nel campo di spezzamento di $f(x)$.
4. Sia α una radice del polinomio $f(x) = x^4 - 8x^2 + 36 \in \mathbb{Q}[x]$. Mostrare che il campo di spezzamento di $f(x)$ in $\mathbb{C}$ è $\mathbb{Q}(\alpha)$ e che il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un gruppo di Klein.
5. Sia $f(x) = x^4 + 30x^2 + 45 \in \mathbb{Q}[x]$. Determinare il campo di spezzamento di $f(X)$ in $\mathbb{C}$ e calcolare il gruppo di Galois di $f(X)$.
6. Dimostrare che il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) = x^3 - p \in \mathbb{Q}[x]$, con $p \in \mathbb{Z}$ elemento irriducibile, è isomorfo a S_3 ed esibire un isomorfismo esplicito.
7. Sia $\xi_7 \in \mathbb{C}$.
   (a) Determinare un numero $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\xi_7) \cap \mathbb{R}$.
   (b) Dire se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un'estensione di Galois di $\mathbb{Q}$.
   (c) Calcolare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ e trovare tutte le sue radici.
   (d) Dire se $G = Gal(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ è ciclico.
8. Sia $\xi_{12} \in \mathbb{C}$.
   (a) Determinare la struttura del gruppo $Gal(\mathbb{Q}(\xi_{12})/\mathbb{Q})$ e il reticolo dei suoi sottogruppi.
   (b) Dimostrare che i campi $F_1 := \mathbb{Q}(i)$, $F_2 := \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, $F_3 := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono contenuti in $\mathbb{Q}(\xi_{12})$.
   (c) Per ogni $i \in 1, 2, 3$, determare l'insieme

   $$H_i := \{\sigma \in Gal(\mathbb{Q}(\xi_{12})/\mathbb{Q}) : \sigma_{|F_i} = Id_{F_i}\},$$

   e mostrare che è un sottogruppo di $Gal(\mathbb{Q}(\xi_{12})/\mathbb{Q})$.

9. Siano p un numero primo, U un'indeterminata su $\mathbb{Q}$, $L := \mathbb{Q}(U^2)$, $K := \mathbb{Q}(U, \sqrt{p})$.

   (a) Calcolare il grado di K su L.

   (b) Dire perché l'estensione di campi K/L è separabile e determinare un elemento primitivo α di K su L.

   (c) Determinare il polinomio minimo di α su L.

   (d) Determinare la struttura del gruppo $Gal(K/L)$.

10. Calcolare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:

   (a) $(x^2 + 1)\phi_5$

   (b) $x^4 - 4$

   (c) $x^4 - 9x^2 + 20$

   (d) $x^4 - 11x^3 + 41x^2 - 61x + 30$

   (e) $x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x + 2$

   Suggerimento: Se E_2, E_2 sono estensioni di Galois di $\mathbb{Q}$ tali che $E_1 \cap E_2 = \mathbb{Q}$, allora si ha che $Gal(E_1E_2/\mathbb{Q}) \cong Gal(E_1/\mathbb{Q}) \times Gal(E_2/\mathbb{Q})$.