Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 6, a cura di D. Menichetti e F. Libertini

1. Sia $\omega = e^{2\pi i/13} \in \mathbb{C}$
   (a) Dire se $\omega^{13} = 1$.
   (b) Scrivere un elemento generico del campo $\mathbb{Q}(\omega)$.
   (c) Determinare $G = Gal(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$.
   (d) Calcolare il grado di $\mathbb{Q}(\omega)$ su $\mathbb{Q}$ e scrivere il polinomio minimo di ω su $\mathbb{Q}$.
   (e) Determinare il campo fisso K del sottogruppo generato dall'automorfismo α dato da $\alpha(\omega) = \omega^2$ e calcolare il grado di $\mathbb{Q}(\omega)$ su K.
   (f) Elencare tutti i sottogruppi di G.
   (g) Elencare tutti i sottocampi di $\mathbb{Q}(\omega)$ contenenti $\mathbb{Q}$.
2. Determinare tutti i sottocampi del 15-esimo ampliamento ciclotomico.
3. Costruire un polinomio a coefficenti razionali il cui gruppo di Galois abbia ordine uguale a 5.
4. Sia $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ e χ: $\mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$, $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ l' omomorfismo di coniugio. Mostrare che, se $\mathbb{Q}(\alpha)$ è un ampliamento normale, χ è un omomorfismo di $\mathbb{Q}(\alpha)$ di ordine 2 e che il campo fissato da $H =< \chi >$ è $\mathbb{Q}(\alpha + \overline{\alpha}, \alpha\overline{\alpha})$.
5. Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
6. Siano $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i\sqrt{3})$ e $K_2 = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$.
   (a) Per i=1,2 mostrare che l'ampliamento $K_i/\mathbb{Q}$ è di Galois e determinare la struttura di $G_i = Gal(K_i/\mathbb{Q})$.
   (b) Per i=1,2 usando il teorema di corrispondenza di Galois, determinare tutti i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ e K_i e stabilire quali sono normali in $\mathbb{Q}$.
   (c) Per ogni campo intermedio, determinare un elemento primitivo ed il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.
7. Sia $\xi = \xi_9 \in C$ e sia $K = \mathbb{Q}(\xi)$. Determinare i campi fissi degli automorfismi $\phi : \xi \mapsto \xi^4$ e $\omega : \xi \mapsto \xi^8$.
8. Sia $f(X) = X^5 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
   (a) Mostrare che il campo di spezzamento di $f(X)$ in $\mathbb{C}$ è $\mathbb{Q}(\alpha, \xi_5)$ con $\alpha := \sqrt[5]{2}$.
   (b) Mostrare che il gruppo di Galois di $f(X)$ su $\mathbb{Q}$ è il prodotto semidiretto, ma non diretto di $Gal(K/\mathbb{Q}(\alpha))$ e $Gal(K/\mathbb{Q}(\xi_5))$.

(c) Identificare $Gal(K/\mathbb{Q})$ con un sottogruppo di S_5.

9. Si consideri il polinomio $f(X) = X^4 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ e siano K un campo di spezzamento di $f(X)$ su $\mathbb{F}_3$, $\alpha \in K$ una radice di $f(X)$.

   (a) Dimostrare che $f(X)$ è irriducibile e separabile.

   (b) Dimostrare che esiste un unico automorfismo τ di $\mathbb{F}_3(\alpha)$ tale che $\tau(\alpha) = \alpha^3$.

   (c) Dimostrare che $K = \mathbb{F}_3(\alpha)$, e descrivere la corrispondenza di Galois per l' ampliamento $\mathbb{F}_3 \subseteq K$.

   (d) Determinare un elemento primitivo e una risolvente di Galois su $\mathbb{F}_3$ per ciascun campo F tale che $\mathbb{F}_3 \subsetneq F \subsetneq K$.