Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2008/2009
TE1 - Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois (Prof. S. Gabelli)
Tutorato 8, a cura di D. Menichetti e F. Libertini

1. Si dimostri che:
   (a) $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$;
   (b) $K = K_1 = K_2$, con $f_1(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$ e $f_2(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ dove K_i è il campo di spezzamento del polinomio $f_i(x)$;
   (c) Si dica qual è il gruppo di Galois dei due polinomi;
   (d) Si descrivano i due gruppi di Galois come gruppi di permutazioni.
2. In ciascuno dei seguenti casi si calcoli il campo di spezzamento e il gruppo di Galois del polinomio dato:
   (a) $(x^2 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;
   (b) $(x^3 + x + 1)(x^6 + x + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$;
   (c) $(x^4 + x + 1)(x^4 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1) \in \mathbb{F}_2[x]$;
   (d) $(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)(x^9 + x^6 + 1)(x^27 + 2x^9 + 1) \in \mathbb{F}_3[x]$.
3. Sia $K = \mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$, dove $\alpha = \sqrt[3]{3}$, $\beta = \sqrt{1 + \alpha}$, $\gamma = \sqrt{1 - \beta}$.
   (a) Verificare che l'ampliamento $K/\mathbb{Q}$ è radicale;
   (b) Determinare un intero n tale che $[K : \mathbb{Q}] \leq n$.
4. Sia K il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ del polinomio $x^2+1+\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$.
   (a) Stabilire se l'ampliamento $K/\mathbb{Q}$ è radicale;
   (b) Determinare la struttura di $Gal(K/\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$, $Gal(K/\mathbb{Q})$.
5. Determinare esplicitamente tutti gli automorfismi del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi:
   $$x^5 - 1; \quad x^6 + 3; \quad x^8 - 2$$
   e scriverli come elementi di S_n (n opportuno).
6. Sia $n > 2$ e $f(x) = x^n - 2$. Mostrare che se $M.C.D.(n, \phi(n)) = 1$, allora il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ha ordine $n\phi(n)$.
7. Determinare il gruppo di Galois ed un sottogruppo di S_n ad esso isomorfo dei seguenti polinomi:
   (a) $x^3 - 5 \in \mathbb{Q}[x]$;
   (b) $(x^2 - 2)(x^3 - 3) \in \mathbb{Q}[x]$;
   (c) $x^3 - 10x^2 - 8x + 64 \in \mathbb{Q}[x]$;
   (d) $f_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$ dove f_α è il polinomio minimo di $\alpha = cos(\frac{2\pi}{7})$.