Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2008/2009
Teoria delle equazioni e Teoria di Galois
Esercizi 1 – 25 Febbraio 2009
a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Si considerino i polinomi

$$f(X) := 2X^4 + 8X^3 + 16X^2 + 24X + 2 \qquad g(X) := 5X^3 - 4X^2 + 3X - 3.$$

(i) Si studi l'irriducibilità di $f(X), g(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$.

(ii) Nell'anello $\mathbb{Q}[X]/(g(X))$, si determini, se esiste, l'inverso della classe del polinomio $20X^4 + X - 1$.

Esercizio 2. Siano A un dominio a fattorizzazione unica, X, Y, T indeterminate su A, $f(X,Y) := Y - X^2 \in A[X,Y]$.

(i) Detto $\tau : A[X,Y] \longrightarrow A[T]$ l'omomorfismo di anelli tale che $X \mapsto T, Y \mapsto T^2$, si mostri accuratamente che $\mathrm{Ker}(\tau) = (f(X,Y))$.

(ii) Si stabilisca, motivamando la risposta, se $A[X,Y]/(f(X,Y))$ è un dominio a fattorizzazione unica.

Esercizio 3. Siano X, Y indeterminate su $\mathbb{R}$, $f(X,Y) := X^2 + 4Y^2 - 1 \in \mathbb{R}[X,Y]$.

(i) Si mostri che $A := \mathbb{R}[X,Y]/(f(X,Y))$ è un dominio di integrità.

(ii) Si determini un elemento $\alpha \in A$ non nullo e non invertibile.

(iii) Si stabilisca, motivamando la risposta, se A è un dominio a fattorizzazione unica.