Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009

TE1 - Esercizi 2 (4 Marzo 2009)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Siano U un'indeterminata su $\mathbb{C}$ e $T := U^4$.

(i) Determinare, motivando in modo esauriente la risposta, il grado di $\mathbb{C}(U)$ su $\mathbb{R}(T)$.

(ii) Determinare, se esiste, un elemento $\alpha \in \mathbb{C}(U)$ tale che $\mathbb{C}(U) = \mathbb{R}(T, \alpha)$

Esercizio 2. Sia $\alpha := \sqrt[4]{3}$ e $K := \mathbb{Q}(\alpha)$.

(i) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$.

(ii) Verificare che $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq K$. Vale l'uguaglianza? Perché?

(iii) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(iv) Posto $\beta := \sqrt{3} + \sqrt[4]{27} - 2$, dire perché $\beta \in K$, determinare l'inverso razionalizzato di β in K e il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

(v) Sia $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio irriducibile di grado 3. Stabilire se f può avere una radice in K.

Esercizio 3. Siano p, q primi distinti e $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.

(i) Si determinino almeno due basi distinte di K come $\mathbb{Q}-$spazio vettoriale.

(ii) Sia α una radice del polinomio $X^7 - \sqrt{p}X^3 + p(\sqrt{p} - 2\sqrt{q})X + 3\sqrt{pq} \in \mathbb{R}[X]$. Dimostrare α è algebrico su $\mathbb{Q}$ e che il grado del polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}$ è al più 28.

Esercizio 4. Siano $K \subseteq L$ un ampliamento di campi, $\alpha, \beta \in L$, n, m numeri naturali primi fra loro. Dimostrare che, se α, β hanno grado su K n, m rispettivamente, allora $[K(\alpha, \beta) : K] = nm$ e $K(\alpha) \cap K(\beta) = K$.

Esercizio 5. Siano $\zeta \in \mathbb{C}$ una radice quinta primitiva dell'unità e $F := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \zeta)$.

(i) Facendo uso dell'Esercizio 4, calcolare $[F : \mathbb{Q}]$.

(ii) Determinare, se esistono, tre campi F_1, F_2, F_3 distinti tali che $\mathbb{Q} \subsetneq F_i \subsetneq F$ $(i = 1, 2, 3)$. Quali fra essi sono isomorfi (come campi)?