Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2008/2009

TE1 - Esercizi 3 (25 Marzo 2009)

a cura di **Carmelo Antonio Finocchiaro**

Esercizio 1. Siano α, γ radici rispettivamente dei polinomi

$$X^2 + 1, X^4 + X^2 + 2 \in \mathbb{F}_3[X].$$

(i) Si determinino tutte le $\mathbb{F}_3-$immersioni di $\mathbb{F}_3(\alpha)$ in $\mathbb{F}_3(\gamma)$.

(ii) Si calcolino gli $\mathbb{F}_3-$automorfismi di $\mathbb{F}_3(\alpha)$.

(iii) Fissata una $\mathbb{F}_3-$immersione $\mathbb{F}_3(\alpha) \hookrightarrow \mathbb{F}_3(\gamma)$, si determini il polinomio minimo di γ su $\mathbb{F}_3(\alpha)$.

(iv) Si estendano gli $\mathbb{F}_3-$automorfismi di $\mathbb{F}_3(\alpha)$ a $\mathbb{F}_3-$automorfismi di $\mathbb{F}_3(\gamma)$.

Esercizio 2. Sia α come nell'esercizio 1, e sia U un'indeterminata su $\mathbb{F}_3(\alpha)$.

(i) Si dimostri che $\mathbb{F}_3(U, \alpha)$ è campo di spezzamento su $\mathbb{F}_3(U^2)$ di un polinomio $f(X) \in \mathbb{F}_3(U^2)[X]$.

(ii) Si determini $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_3(U)/\mathbb{F}_3(U^2))$.

(iii) Si estendano gli elementi di $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_3(U)/\mathbb{F}_3(U^2))$ a $\mathbb{F}_3(U^2)-$immersioni di $\mathbb{F}_3(U, \alpha)$ e si dica se ciascuno di essi è un $\mathbb{F}_3(U^2)-$automorfismo.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio $f := X^4 + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$ e sia L un suo campo di spezzamento su $\mathbb{F}_5$.

(i) Detta $\alpha \in L$ una radice di f, si verifichi che $\mathbb{F}_5(\alpha) = L$.

(ii) Si stabilisca se α è un generatore del gruppo moltiplicativo L^*.

Siano $g := X^2 + X - 3 \in \mathbb{F}_5[X]$, e K un campo di spezzamento di g su $\mathbb{F}_5$.

(iii) Si spieghi perché i campi K, L sono isomorfi e si determinino tutti gli isomorfismi fra K e L.

Esercizio 4. Si mostri che il gruppo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ possiede 7 sottogruppi di Kline.

Esercizio 5. Un ripasso di S_4 ☺.

(i) Si calcoli l'ordine di tutti gli elementi di S_4, si verifichi che S_4 non contiene elementi di ordine 8.

(ii) Si mostri che esistono due $4-$cicli di S_4 il cui prodotto è un $3-$ciclo, e si deduca che S_4 non possiede sottogruppi isomorfi al gruppo $\mathbb{H}$ delle unità dei quaternioni (può essere utile tenere presente che $\mathbb{H}$ ha 6 elementi di ordine 4).

(iii) Sia $\sigma := (1xyz)$ un $4-$ciclo di S_4, e sia $H \subseteq S_4$ un sottogruppo di ordine 8 contenente σ. Si dimostri che, per ogni $4-$ciclo $\tau \neq \sigma, \sigma^{-1}$ di S_4, si ha $\tau \notin H$. Si deduca che S_4 non possiede sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(iv) Siano $\sigma := (xy), \tau := (zt) \in S_4$ $2-$cicli distinti e non disgiunti (ovvero $\{x, y\} \cap \{z, t\} \neq \emptyset$). Si dimostri che $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

(v) Sia V un sottogruppo di Kline di S_4. Si mostri che V contiene due $2-$cicli distinti disgiunti. Si deduca che S_4 contiene esattamente 3 sottogruppi di Kline.

(vi) Si usi l'Esercizio 4 per mostrare che S_4 non contiene sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

(vii) Si deduca che ogni sottgruppo di ordine 8 di S_4 è isomorfo a D_4.