Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
8 Novembre 2010
Prima prova di valutazione in itinere

Al candidato è richiesto di risolvere il maggior numero possibile di esercizi. Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, libri di testo nè appunti. Non è permesso lasciare l'aula prima della consegna dell'elaborato. Si ricorda che la prova ha carattere strettamente individuale.

Esercizio 1. *Si consideri il polinomio* $f(x) = x^3 + 3x + 3 \in \mathbb{F}_5[x]$.

(i) *Provare che* $f(x)$ *è irriducibile su* $\mathbb{F}_5$.

(ii) *Spiegare perchè* $f(x)$ *è separabile su* $\mathbb{F}_5$.

(iii) *Costruire un'estensione* K *di* $\mathbb{F}_5$ *che sia campo di spezzamento per* $f(x)$ *su* $\mathbb{F}_5$.

(iv) *Esplicitare le radici di* $f(x)$ *in* K.

(v) *Calcolare* $[K : \mathbb{F}_5]$ *e la cardinalità di* K.

(vi) *Determinare* $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{F}_5}(K)$ *e la sua struttura.*

(vii) *Dimostrare che il polinomio* $F(x, y) = y^3 - f(x)$ *è irriducibile in* $K[x, y]$.

Esercizio 2. *Siano* L *ed* M *rispettivamente i campi di spezzamento su* $\mathbb{F}_3$ *dei polinomi* $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ *e* $g(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ *di* $\mathbb{F}_3[x]$. *Fattorizzare* $f(x)$ *in* L *e* $g(x)$ *in* M. *Mostrare che* L *ed* M *sono campi isomorfi e determinare tutti i possibili isomorfismi tra essi. Giustificando la risposta, dire se* $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{F}_3}(L)$ *è un gruppo abeliano.*

Esercizio 3. *Siano* F *un campo e* β *una radice del polinomnio*

$$f(x) = x^7 - 10x^4 + 20x^2 - 10x - 5 \in F[x].$$

(i) *Si studi l'irriducibilità di* $f(x)$ *su* $F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

(ii) *Sia* $\bar{f}(x)$ *il polinomio che si ottiene a partire da* $f(x)$ *quozientando modulo 2 i suoi coefficienti. Fattorizzare* $\bar{f}(x)$ *su* $\mathbb{Z}_2$.

(iii) *Si provi che, per* $F = \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, $F(\beta) = F(\beta^2)$.

(iv) Si stabilisca se β^2 è algebrico su $F = \mathbb{Q}$ e su $F = \mathbb{C}$.

(v) Si trovi il polinomio minimo di β^2 su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{C}$.

(vi) Si calcoli il polinomio minimo di $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ su $\mathbb{Q}$ e si dica se esso può avere radici in $\mathbb{Q}(\beta)$.

Esercizio 4. *Sia dato il polinomio $f(x) = x^4 + 30x^2 + 45 \in \mathbb{Q}[x]$. Sia α una sua radice.*

(i) Mostrare che $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

(ii) Mostrare che il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(iii) Determinare il gruppo di Galois di $f(x)$ e la sua struttura.

Esercizio 5. *Si considerino il numero reale $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{6}-\sqrt{15}}$ e l'immersione $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{15}) \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\varphi(\sqrt{6}) = -\sqrt{6}$ e $\varphi(\sqrt{15}) = \sqrt{15}$. Costruire le immersioni di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$ che estendono φ. Tra queste estensioni quante mandano $\sqrt{10}$ in $-\sqrt{10}$?*

Esercizio 6. *Siano dati il polinomio $f(x) = x^5 - \frac{\sqrt[3]{2}}{8}x^3 + 11\sqrt[3]{4}\,x - \sqrt{5} \in \mathbb{R}[x]$ e ρ una radice di $f(x)$.*

(i) Provare che il grado di ρ su $\mathbb{Q}$ è al più 30.

(ii) Si consideri il numero reale $\alpha \stackrel{def}{=} f(\log 2)$. Dimostrare che α è trascendente su $\mathbb{Q}$. Esiste un'estensione finita del campo $\mathbb{Q}$ su cui α è algebrico?

Esercizio 7. *(i) Calcolare il nono polinomio ciclotomico $\Phi_9(x)$ su $\mathbb{Q}$.*

(ii) Determinare il gruppo di Galois di $\Phi_9(x)$ e la sua struttura.

(iii) Sia ζ_9 una radice nona primitiva dell'unità di $\mathbb{C}$. Calcolare il polinomio minimo di $\zeta_9 + \bar{\zeta}_9$ su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 8. *Determinare tutte le radici settime dell'unità di $\mathbb{F}_2$ e selezionare quelle primitive. Costruire il settimo polinomio ciclotomico su $\mathbb{F}_2$.*