Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
10 Gennaio 2011
Seconda prova di valutazione in itinere

Al candidato è richiesto di risolvere il maggior numero possibile di esercizi. Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, libri di testo né appunti. Non è permesso lasciare l'aula prima della consegna dell'elaborato. Si ricorda che la prova ha carattere strettamente individuale.

Esercizio 1. *Si consideri il polinomio* $f(x) = x^4 - 2x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x]$*. Sia* $\mathbb{Q}_f$ *il campo di spezzamento di* $f(x)$ *su* $\mathbb{Q}$*.*

(i) *(*) Fattorizzare* $f(x)$ *su* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$*.*

(ii) *(*) Spiegare perchè* $f(x)$ *è separabile su* $\mathbb{Q}$*.*

(iii) *(*) Costruire* $\mathbb{Q}_f$ *e calcolare il suo grado su* $\mathbb{Q}$*.*

(iv) *(*) Determinare* $G = \mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}_f)$ *e la sua struttura.*

(v) *Giustificando esaurientemente la risposta, dire se esiste un ordinamento delle radici di* $f(x)$ *per cui l'immersione di* G *in* S_4 *è il sottogruppo* $\{(1), (13), (24), (13)(24)\}$*.*

(vi) *Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'ampliamento* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_f$*.*

(vii) *(*) Spiegare perchè il polinomio* $g(x) = \frac{2}{15}x^7 - \frac{6}{5}x^3 - 4x^2 + 2x - \frac{2}{5} \in \mathbb{Q}[x]$ *non può avere radici in* $\mathbb{Q}_f$*.*

Esercizio 2. *Costruire un'estensione ciclotomica di* $\mathbb{Q}$ *che contenga il campo*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{11} + 2\sqrt{5} - 1).$$

Esercizio 3. *Sia* $\zeta \in \mathbb{C}$ *una radice primitiva tredicesima dell'unità.*

(i) *(*) Determinare una base di* $\mathbb{Q}(\zeta^2)$ *su* $\mathbb{Q}$ *che contenga l'elemento* $\zeta + \zeta^3$*.*

(ii) *Spiegare perchè il reticolo dell'estensione* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$ *contiene sei campi.*

(iii) *Esplicitare la corrispondenza di Galois per* $\mathbb{Q}(\zeta)$*.*

(iv) *Individuare i sottocampi reali di* $\mathbb{Q}(\zeta)$*.*

(v) *Determinare una risolvente di Galois per l'estensione*

$$\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^{10} + \zeta^{12}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^3 + \zeta^9).$$

(vi) *Stabilire se* $\zeta + \zeta^3 + \zeta^9$ *è un numero complesso costruibile. In caso affermativo, esprimerlo in forma radicale.*

Esercizio 4. *Sia* $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$. *Costruire, se possibile, un'estensione propria normale, una non normale ed una non separabile di* K.

Esercizio 5. *Sia dato il polinomio* $f(x) = x^5 + 3x^2 - 3x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ *e sia* ζ *una radice decima primitiva dell'unità.*

(i) *Determinare un'immersione del gruppo di Galois di* $f(x)$ *in* S_5, *specificando se si tratta di un sottogruppo transitivo.*

(ii) *Stabilire se l'equazione polinomiale* $f(x) = 0$ *è risolubile per radicali.*

(iii) *Dire se* ζ^3 *è una radice di* $f(x)$.

Esercizio 6. *Sia dato il polinomio*

$$f(x) = x^{13} - \sqrt[4]{3}x^9 + 8\sqrt{3}x^7 - \sqrt{21}x^3 + 4x^2 - \sqrt{7}x \in \mathbb{R}[x].$$

(i) *(*) Determinare il campo di definizione* D_f *di* $f(x)$ *e calcolare* $[D_f : \mathbb{Q}]$.

(ii) *(*) Provare che le radici di* $f(x)$ *sono numeri algebrici su* $\mathbb{Q}$ *e stimarne il grado.*

(iii) *(*) Dimostrare che* $f(e)$ *è trascendente su* $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$.

Esercizio 7. *Dimostrare che i campi algebricamente chiusi hanno cardinalità infinita.*

Esercizio 8. *Sia dato il polinomio* $f(x) = x^3 + \sqrt[4]{3}x + \sqrt{3} \in \mathbb{R}[x]$. *Siano* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *le sue radici.*

(i) *Costruire un polinomio a coefficienti in* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ *che abbia per radici* α^2, β^2 *e* γ^2.

(ii) *Si dimostri che* $(\alpha^2 - 2)(\beta^2 - 2)(\gamma^2 - 2)$ *è un elemento di* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$. *Esprimere se possibile tale quantità in funzione dei coefficienti di* $f(x)$.

Esercizio 9. *Dire se il numero*

$$\sqrt[4]{i + \sqrt{2}} - \sqrt{1 + \sqrt{5}} + \sqrt{5} + 1 \in \mathbb{C}$$

è costruibile. In caso affermativo presentare una sua costruzione.