Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
18 Gennaio 2011
Appello A

Al candidato è richiesto di risolvere il maggior numero possibile di esercizi. Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, libri di testo né appunti. Non è permesso lasciare l'aula prima della consegna dell'elaborato. Si ricorda che la prova ha carattere strettamente individuale.

Esercizio 1. *Costruire un polinomio a coefficienti razionali che abbia gruppo di Galois ciclico di ordine* 5.

Esercizio 2. *Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione* $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{64}$. *Al variare di* L *tra i sottocampi intermedi* $\mathbb{F}_2 \subseteq L \subseteq \mathbb{F}_{64}$, *costruire una risolvente di Galois per le estensioni* $\mathbb{F}_2 \subseteq L$ *ed* $L \subseteq \mathbb{F}_{64}$.

Esercizio 3. *Dopo aver dimostrato che il polinomio*

$$f(x) = \frac{5}{6}x^3 - 5x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}[x]$$

è irriducibile e separabile su $\mathbb{Q}$, *stabilire se* $f(x)$ *è risolubile e se ha gruppo di Galois abeliano.*

Esercizio 4. *Sia* $\zeta \in \mathbb{C}$ *una radice ottava primitiva dell'unità. Si ponga* $\alpha = \zeta^5 + \zeta^3$.

(i) Calcolare $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$.

(ii) Esibire una base di $\mathbb{Q}(\zeta)$ *come* $\mathbb{Q}$*-spazio vettoriale che contenga l'elemento* $\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2$.

(iii) Determinare il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ *del numero* α.

(iv) Provare che $\mathbb{Q}(\alpha)$ *è un campo reale.*

(v) Determinare i coniugati di α *su* $\mathbb{Q}$.

(vi) Determinare il polinomio minimo di ζ *su* $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 5. *Sia dato il polinomio* $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ *e siano* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *le sue radici. Determinare un polinomio* $g(x)$ *che ha per radici* α^2, β^2 *e* γ^2 *ed un polinomio* $h(x)$ *che ha per radici* $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ *ed* $\frac{1}{\gamma}$. *Dire se i coefficienti del polinomio* $3g(x)^7 - g(x)h(x) + 1$ *sono funzioni simmetriche delle radici di* $f(x)$ *e determinarne alcuni.*

Esercizio 6. *Sia F un campo di caratteristica diversa da due. Siano α e β due elementi trascendenti su F. Provare che almeno uno tra $\alpha+\beta$ ed $\alpha-\beta$ è trascendente su F. La conclusione è ancora vera se si lavora in caratteristica due?*

Esercizio 7. *Si consideri il polinomio*

$$f(x) = x^{2011} - \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\,x^3 - 6\sqrt[3]{9}\,x - \frac{\sqrt{2}}{3} \in \mathbb{R}[x].$$

Siano $D_f \subseteq \mathbb{R}$ il campo di definizione di $f(x)$ ed η una radice di $f(x)$. Sia $\alpha \overset{def}{=} f(\pi)$.

(i) *Stimare $[D_f(\eta) : \mathbb{Q}]$.*

(ii) *Dimostrare che α è trascendente su $\mathbb{Q}$. Mostrare inoltre che non esiste un'estensione finita di $\mathbb{Q}$ su cui α è algebrico.*

Esercizio 8. *Stabilire se il poligono regolare di 240 lati è costruibile con riga e compasso.*

Esercizio 9. *Si consideri il polinomio $f(x) = x^3 - 4 \in \mathbb{Q}[x]$. Sia $\mathbb{Q}_f$ il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.*

(i) *Fattorizzare $f(x)$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.*

(ii) *Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}_f$.*

(iii) *Individuare le estensioni normali di $\mathbb{Q}$ contenute in $\mathbb{Q}_f$.*