

# AL310 Istituzioni di Algebra Superiore

A.A. 2010/2011

Prof. Stefania Gabelli

## Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois

### 1. Elementi di Teoria dei Campi

Campi e sottocampi. Caratteristica. Omomorfismi di campi.

Ampliamenti di campi. Ampliamenti semplici e finitamente generati. Il composto di due campi.

Elementi algebrici e trascendenti. Il polinomio minimo di un elemento algebrico. Ampliamenti semplici.

Il grado di un ampliamento. Ampliamenti quadratici e biquadratici. Ampliamenti finiti.

Radici  $n$ -sime dell'unità. Radici primitive. Polinomi ciclotomici. Ampliamenti ciclotomici.

Costruzioni di radici e campi di spezzamento.  $F$ -isomorfismi. Unicità del campo di spezzamento.

Campi finiti: esistenza ed unicità. Polinomi irriducibili su campi finiti.

Ampliamenti algebrici. Ampliamenti algebrici finitamente generati. Esempi di ampliamenti algebrici non finiti.

Chiusura algebrica e campi algebricamente chiusi.

Elementi coniugati e campi coniugati. Chiusura normale e ampliamenti normali.

Cenni sugli ampliamenti separabili. Il teorema dell'elemento primitivo. Ampliamenti di Galois finiti.

### 2. La corrispondenza di Galois

Il gruppo di Galois di un ampliamento di campi. Il gruppo di Galois di un polinomio.

Il gruppo di Galois di un polinomio come gruppo di permutazioni: polinomi di terzo grado e polinomi biquadratici. Esempi di polinomi di grado primo  $p$  con gruppo di Galois isomorfo a  $S_p$ .

Il gruppo di Galois di un ampliamento ciclotomico.

Campi intermedi e campi fissi.

Il Teorema Fondamentale della corrispondenza di Galois. Calcolo esplicito di esempi.

La corrispondenza di Galois per alcuni ampliamenti ciclotomici. Sottocampi reali di ampliamenti ciclotomici. Costruzione di polinomi con tutte radici reali. Costruzione di polinomi con gruppo di Galois ciclico.

### 3. Alcune applicazioni della corrispondenza di Galois

Polinomi e funzioni simmetriche: il teorema fondamentale. Il polinomio generale e il suo gruppo di Galois. Relazioni fra le radici ed i coefficienti di un polinomio. Il discriminante di un polinomio. Formule per il calcolo del discriminante. Il discriminante del  $p$ -esimo ampliamento ciclotomico. Ogni ampliamento quadratico è contenuto in un ampliamento ciclotomico.

Il problema della risolubilità per radicali di un'equazione polinomiale.

Ampliamenti radicali. Il gruppo di Galois di un ampliamento radicale puro di grado  $p$ .

Cenni sui gruppi risolubili: esempi.

Un polinomio è risolubile per radicali se e soltanto se il suo gruppo di Galois è risolubile. Dimostrazione della necessità.

Il Teorema di Ruffini-Abel: Il polinomio generale di grado  $n \geq 5$  non è risolubile per radicali.

Esempi di equazioni di quinto grado risolubili o non risolubili per radicali.

Le formule di Cardano per le soluzioni di un'equazione di terzo grado. Discussione delle radici reali in base al segno del discriminante.

Costruzioni con riga e compasso. CNES per la costruibilità di un punto. Costruzioni impossibili. Costruzione dei poligoni regolari: il teorema di Gauss.

### 4. Argomenti facoltativi

(1) Irriducibilità dei polinomi ciclotomici (Paragrafo 4.4.1).

(2) Il teorema di Dirichlet sull'esistenza di numeri primi congrui a 1 modulo  $n$  (Paragrafo 4.4.4).

(3) Costruzione di polinomi irriducibili su  $\mathbb{Q}$  con gruppo di Galois abeliano assegnato (Teorema 8.3.14).

(4) Caratterizzazione degli ampliamenti ciclici (Teorema Kummer, 9.1.4) e dimostrazione completa del teorema di risolubilità (Teorema 9.2.5).

(5) Introduzione storica e formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado (Paragrafi 9.3/4).

(6) I gruppi di Galois dei polinomi di quarto grado (Paragrafo 9.4.3).

(7) Equazioni di quinto grado (Paragrafo 9.5.1)

(8) Una dimostrazione del teorema fondamentale dell'Algebra (Capitolo 10).

(9) Basi di trascendenza (Paragrafi 6.1/2).

(10) Gli automorfismi del campo complesso (Paragrafo 6.5)

I riferimenti bibliografici sono al testo consigliato.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] S. GABELLI, *Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois*. Springer Italia, (2008).

## BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [2] C. PROCESI, *Elementi di Teoria di Galois*. Decibel, Zanichelli, (Seconda ristampa, 1991).  
 [3] I. STEWART, *Galois Theory*. Chapman and Hall, (1989).  
 [4] J. ROTMAN, *Galois Theory*. Universitext, Springer-Verlag, (1990).  
 [5] M. H. FENRICK, *Introduction to the Galois Correspondence*. Birkäuser, (1992).  
 [6] M. ARTIN, *Algebra*. Bollati-Boringhieri, (1998).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO

L'esame consiste di due prove scritte da svolgersi in classe durante il corso e da un colloquio integrativo.

Nel caso in cui la media dei voti riportati nelle due prove scritte non raggiunga la sufficienza è necessario sostenere una prova scritta finale.