Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
21 Settembre 2010 - Esercitazione n.1
Antonio Cigliola

Esercizio 1. *Fattorizzare su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}_2$ i seguenti polinomi:*

1. $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 4$;
2. $g(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 6$;
3. $h(x) = x^4 - x^2 - 1$.

Esercizio 2. *Provare che il polinomio* $f(x) = \frac{27}{4}x^{100} + \frac{18}{3}x^{62} - 9x^{17} + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}[x]$ *è irriducibile su* $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. *Fattorizzare su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ il polinomio*

$$f(x) = 4x^6 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{26}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{32}{3}x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Esercizio 4. *Studiare al variare del parametro $a \in \mathbb{Z}$ la riducibilità del polinomio* $f(x) = 3x^3 + 20ax^2 + 50a^2x + 60 \in \mathbb{Z}[x]$ *su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.*

Esercizio 5. *Fattorizzare su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{Z}_2$ il polinomio* $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 1$.

Esercizio 6. *Sia $a \in \mathbb{Z}$ un elemento privo di fattori quadratici. Provare che per ogni $n \geqslant 1$ il polinomio $x^n - a$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$. Cosa si può dire invece di $x^n + a$? E di $x^n + a^n x^{n-3} + a$, con $n > 3$?*

Esercizio 7. *Decomporre in irriducibili di $\mathbb{C}[x,y]$ i polinomi*

1. $f(x,y) = x^4 - 1$;
2. $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$;
3. $h(x,y) = -x^6 + x^3y^2 - xy^3 + x^4y$.

Esercizio 8. *Sia dato il polinomio*

$$f(x) = x^5 - x^3 - 6x - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Si determini un rappresentante della classe di isomorfismo degli anelli $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$, $\frac{\mathbb{R}[x]}{(f(x))}$, $\frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))}$. *Quale tra questi è campo? Quale integro?*

Esercizio 9. *Sia dato il polinomio $f(x) = x^4 + x^2 \in \mathbb{Q}[x]$. Si dica se $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$ è isomorfo a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$; in caso negativo esibire un rappresentante della sua classe di isomorfismo fornendo tutti i dettagli.*

Esercizio 10. *Si consideri il polinomio* $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x - 3 \in \mathbb{Q}[x]$*. Decidere se nell'anello* $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$ *la classe dell'elemento* $6x^4 + x - 1$ *ammette o no inverso; in caso affermativo determinarlo.*

Esercizio 11. *Al variare di* $a \in \mathbb{Z}_7$ *si consideri il polinomio*

$$f_a(x) = a + x^2 + ax + 2 \in \mathbb{Z}_7[x].$$

Sia Ξ_a *l'insieme quoziente di* $\mathbb{Z}_7[x]$ *modulo* $(f_a(x))$.

1. *Costruire l'insieme* $A = \{a \in \mathbb{Z}_7 \mid x + 1$ *non è divisore di* $f_a(x)\}$;
2. *posto* $\psi_a = x + (f_a(x)) \in \Xi_a$, *si costruisca l'insieme* B *degli elementi di* $\mathbb{Z}_7$ *per cui* $\psi_a + 1$ *è invertibile in* Ξ_a;
3. *determinare espilcitamente l'inverso* $\psi_0 + 1$;
4. *confrontare gli insiemi* A *e* B *e commentare il risultato ottenuto;*
5. *costruire l'insieme* $C \subset \mathbb{Z}_7$ *costituito dagli* $a \in \mathbb{Z}_7$ *per cui* Ξ_a *è campo;*
6. *costruire l'insieme* $D \subset \mathbb{Z}_7$ *costituito dagli* $a \in \mathbb{Z}_7$ *per cui* Ξ_a *è dominio;*
7. *confrontare gli insiemi* C *e* D *e commentare il risultato ottenuto;*
8. *determinare un elemento non nullo e non invertibile di* Ξ_2;
9. *scelto un elemento* $a \in C$, *provare che* $f_a(x)$ *si spezza linearmente in* Ξ_a;
10. *a partire da* $f_1(x)$, *costruire un polinomio in* $\mathbb{Z}[x]$ *riducibile su* $\mathbb{Z}$ *ed irriducibile su* $\mathbb{Q}$.

Esercizio 12. *Dimostrare con tutti i dettagli che* $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$.