Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
28 Settembre 2010 - Esercitazione n.2
Antonio Cigliola

Esercizio 1. *Si esibisca una base del campo numerico* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ *e si dimostri che* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{9})$*. Posto* $\alpha = \sqrt[3]{3}$*, portare in* forma canonica *gli elementi:*

(a) α^{-1};

(b) $\alpha^{-2} + 2\alpha^{-1} + 3\alpha^4 - 5$;

(c) $\alpha^5 - \alpha^4 - \alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha + 2$;

(d) $\frac{1}{\alpha^2-7\alpha+4}$;

(e) $\frac{2\alpha^2+\alpha-3}{\alpha^2-\alpha}$.

Esercizio 2. *Razionalizzare i seguenti numeri reali:*

(a) $\frac{-2}{-2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}+3}$;

(b) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}$;

(c) $\frac{\sqrt[5]{2}+7}{\sqrt[5]{16}-1+2\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}}$.

Esercizio 3. *Provare le seguenti uguaglianze tra campi:*

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\ i) = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5} + i)$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{7} - 2\sqrt{3} - 10) = \mathbb{Q}(\sqrt{7},\ \sqrt{3})$;

(d) $\mathbb{Q}(\pi,\ \pi^2) = \mathbb{Q}(\frac{1}{\pi}) = \mathbb{Q}(\pi - \frac{1}{3})$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$.

Esercizio 4. *Siano* F *un campo e* β *una radice del polinomnio* $f(x) = x^5 - 9x^4 - 3x^2 + 3 \in F[x]$.

(a) Si studi l'irriducibilità di $f(x)$ *su* $F = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ *e* $\mathbb{Z}_2$.

(b) Posto $F = \mathbb{Q}$*, si dica se* $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta^2)$.

(c) Si dimostri che β^2 è algebrico su $F = \mathbb{Q}$ e su $F = \mathbb{C}$.

(d) Si trovi il polinomio minimo di β^2 in entrambi i casi di cui al punto precedente.

Esercizio 5. *Descrivere esplicitamente gli elementi dei seguenti campi:*

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\ \sqrt{5})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7})$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6},\ i)$;

(d) $\mathbb{Q}(\frac{\sqrt{3}}{8},\ 2\sqrt{3}-41)$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3},\ \sqrt{5})$;

(f) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$;

(g) $\mathbb{Q}(i-\sqrt{5})$;

(h) $\mathbb{Q}(e,\ \sqrt{7})$;

(i) $\mathbb{Q}(\pi,\ \pi^2,\ 2\sqrt{8}-6)$;

(j) $\mathbb{Q}(\sqrt{13},\ \sqrt{11},\ \log 2)$.

Esercizio 6. *Calcolare i seguenti gradi di estensioni di campi:*

(a) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}]$;

(b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}(\sqrt{5})]$;

(c) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}+i):\mathbb{Q}]$;

(d) $[\mathbb{Q}(\pi,\ \sqrt[100]{5}):\mathbb{Q}]$;

(e) $[\mathbb{Q}(\pi,\ \sqrt[101]{5}):\mathbb{Q}(\pi)]$;

(f) $[\mathbb{Q}(\pi,\pi^2-3\pi+1):\mathbb{Q}(\pi^2)]$;

(g) $[\mathbb{Q}(\pi,\pi^2-3\pi+1):\mathbb{Q}(\pi)]$;

(h) $[\mathbb{Q}(e):\mathbb{Q}(e^2)]$;

(i) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5-2\sqrt{3+\sqrt{7}}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(j) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5-2\sqrt{3+\sqrt{7}}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{7})\right]$;

(k) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{3+\sqrt{7}}}\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\right)\right]$;

(l) $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(m) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{3})\right]$;

(n) $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{i}{\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(o) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}-i,\ \frac{\sqrt{7}}{3}+9\right):\mathbb{Q}(\sqrt{7},\ i-2\sqrt{3})\right]$;

(p) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(q) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{6})\right]$.

Esercizio 7. *Per ciascuno dei seguenti numeri calcolare il polinomio minimo sui campi a fianco indicati:*

(a) $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *e* $\mathbb{Q}$;

(b) $\sqrt{3}-2\sqrt{7}$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ *e* $\mathbb{Q}$;

(c) $i\sqrt[4]{5}$ *su* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, $\mathbb{C}$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{5})$;

(d) π *su* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}(\pi^3)$;

(e) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2-i)$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$;

(f) $\cos 2\alpha$ *su* $\mathbb{Q}(\sin\alpha)$, $\mathbb{Q}(\cos\alpha)$ *ed* $\mathbb{R}$ †;

(g) π^3 *su* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}(\pi^2)$;

(h) $\sqrt[3]{7}-i$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{49})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}$ *ed* $\mathbb{R}$;

(i) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ *su* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3-\sqrt{2}})$, $\mathbb{C}$ *ed* $\mathbb{R}$.

(j) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Esercizio 8. *Provare che il numero reale* $\alpha=\pi^4+2\pi^3-\pi-2$ *è trascendente su* $\mathbb{Q}$. *Determinare, se esiste, un'estensione dei campi* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}(\pi)$ *di grado minimo su cui* α *è algebrico.*

Esercizio 9. *Determinare, anche in* forma parametrica*, per quali valori del numero intero* k *il polinomio* $f(x)=x^4-kx^2+1$ *è irriducibile su* $\mathbb{Z}$.

Esercizio 10. *Siano* p *e* q *due primi distinti. Dimostrare che le estensioni semplici* $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ *non sono isomorfe come campi. Cosa si può dire delle stesse strutture viste come* $\mathbb{Q}$*-spazi vettoriali?*

---

† si supponga che tutte le funzioni goniometriche con cui si lavora siano trascendenti su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 11. *Mostrare che* $\mathbb{Q}(\sqrt[s]{2},\ \sqrt[t]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[s]{2}\sqrt[t]{3})$ *per ogni* $s,\ t \geqslant 2$ *interi coprimi.*

Esercizio 12. *Mostrare che dati comunque* $m,\ n \geqslant 2$ *esiste* $r \geqslant 2$ *tale che* $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{2},\ \sqrt[n]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2})$.

Esercizio 13. *Siano* F *un campo ed* $\alpha = \frac{x^3}{x-1} \in F(x)$. *Mostrare che* α *è trascendente su* F *e che* x *è algebrico su* $F(\alpha)$. *Determinare il polinomio minimo di* x *su* $F(\alpha)$ *e* $[F(x) : F(\alpha)]$.

Esercizio 14 (Leibnitz)**.** *Sia* β *una radice del polinomio* $g(x) = x^4 + 1$. *Mostrare che* β *ha grado* 4 *su* $\mathbb{Q}$ *ma ha grado* 2 *su* $\mathbb{R}$. *Fattorizzare* $g(x)$ *su* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$.

Esercizio 15. *Dire se* $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt[3]{2}+1},\ \sqrt{3})$ *è un'estensione biquadratica di* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Esercizio 16 (Estensioni quadratiche in caratteristica 2)**.** *Provare che il polinomio* $p(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ *è irriducibile su* $\mathbb{Z}_2$. *Costruire esplicitamente gli elementi del campo* $K = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2+x+1)}$ *e calcolare il suo grado su* $\mathbb{Z}_2$. *Calcolare i quadrati degli elementi di* K *e dedurre che in caratteristica* 2 *non vale la caratterizzazione data per le estensioni quadratiche in caratteristica diversa da* 2.

Esercizio 17. *Siano* K *un campo ed* a *e* b *elementi algebrici su* K. *Dire se* $[K(a,\ b) : K(a)]$ *divide* $[K(b) : K]$. *In caso negativo esibire un controesempio.*

Esercizio 18. *Mostrare che se* F *è un qualsiasi campo numerico e* d *è un numero intero allora* $F(\sqrt{d}) = F(a + b\sqrt{d}) = F(c\sqrt{d})$, *per ogni* $a,\ b,\ c \in F^*$.

Esercizio 19. *Stabilire se* $\mathbb{Q}(i + \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.