Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
26 Ottobre 2010 - Esercitazione n.4
Antonio Cigliola

Esercizio 1. *Nel campo $\mathbb{C}$ siano A l'insieme delle radici primitive ottave dell'unità e B l'insieme delle radici quarte dell'unità negativa. Dimostrare che $A = B$.*

Esercizio 2. *Determinare le radici seste dell'unità di $\mathbb{Z}_5$. Selezionare tra esse quelle che sono primitive e presentare il sesto polinomio ciclotomico su $\mathbb{Z}_5$. Costruire il sesto ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Z}_5$ e provare che è isomorfo ad $\mathbb{F}_{25}$; determinare tutti i suoi sottocampi ed il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Z}_5$.*

Esercizio 3. *Calcolare le radici ventottesime*[†] *dell'unità di $\mathbb{Z}_7$ e selezionare quelle primitive.*

Esercizio 4. *Calcolare le radici ventunesime dell'unità negativa in $\mathbb{Z}_7$ indicandone le molteplicità.*

Esercizio 5. *Calcolare le radici quarantanovesime dell'unità di $\mathbb{Z}_7$ indicandone le molteplicità e selezionando quelle primitive.*

Esercizio 6. *Calcolare le radici centoventottesime primitive dell'unità di $\mathbb{Z}_2$.*

Esercizio 7. *Per ogni $1 \leqslant n \leqslant 20$ calcolare $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Determinare l'n-simo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$, il suo grado ed il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 8. *Per ogni $1 \leqslant n \leqslant 12$; $n = 16; 24$ calcolare $\Phi_n(x)$ su $\mathbb{Z}_2$. Determinare poi l'n-simo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Z}_2$, il suo grado ed il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Z}_2$.*

Esercizio 9. *Per ogni $1 \leqslant n \leqslant 10$; $n = 12; 15; 20; 25$ calcolare $\Phi_n(x)$ su $\mathbb{Z}_5$. Determinare poi l'n-simo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Z}_5$, il suo grado ed il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Z}_5$.*

Esercizio 10. *Dimostrare che i polinomi ciclotomici sono reciproci. Determinarne la specie.*

[†]Qui e negli esercizi a seguire si faccia abuso della notazione definendo i polinomi ciclotomici anche quando l'ordine è multiplo della caratteristica del campo, tralasciando così la molteplicità delle sue radici.

Esercizio 11. *Dimostrare che per ogni* $n \geqslant 3$ $\Phi_n(x)$ *ha grado pari.*

Esercizio 12. *Dimostrare che per ogni* $n \geqslant 1$ $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *è irriducibile su* $\mathbb{Q}$. *Provare poi che in realtà* $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *e che è irriducibile anche su* $\mathbb{Z}$.

Esercizio 13. *Si faccia un esempio concreto in cui si estendono gli automorfismi di* $\mathbb{F}_8$ *ad automorfismi di* $\mathbb{F}_{16}$. *Determinare* $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{F}_2}\mathbb{F}_8$, $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{F}_2}\mathbb{F}_{16}$ *e le loro strutture. Stabilire se uno è sottogruppo dell'altro.*

Esercizio 14. *Si faccia un esempio concreto in cui si estendono gli automorfismi di* $\mathbb{F}_8$ *ad automorfismi di* $\mathbb{F}_{64}$. *Determinare* $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{F}_2}\mathbb{F}_{16}$ *e la sua struttura.*

Esercizio 15. *Dimostrare che per ogni* $n \geqslant 1$ $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$. *Dimostrare che* $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\zeta_6)$. *Esplicitare* $\mathbb{Q}(\zeta_4)$ *e* $\mathbb{Q}(\zeta_8)$. *Dedurre che sebbene* $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$, *tuttavia in generale non vale l'inclusione contraria.*

Esercizio 16. *Dimostrare che per ogni* $m, n \geqslant 1$ *tali che* $m \mid n$ *allora* $\mathbb{Q}(\zeta_m) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Esercizio 17. *Dimostrare che per ogni* n *dispari* $\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$.

Esercizio 18. *Si consideri il numero reale* $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$.

(a) Determinare $f(x)$ *il polinomio minimo di* α *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

(b) Determinare $g(x)$ *il polinomio minimo di* α *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(c) Determinare $h(x)$ *il polinomio minimo di* α *su* $\mathbb{Q}$.

(d) Verificare che h *ha tutte radici reali.*

(e) Stabilire se tra $f(x)$, $g(x)$ *ed* $h(x)$ *esistono delle relazioni di divisibilità.*

(f) Determinare i campi di spezzamento di f, g *ed* h *sui loro campi di definizione*[†] *e chiamarli rispettivamente* $\mathbb{Q}_f$, $\mathbb{Q}_g$ *e* $\mathbb{Q}_h$.

(g) Dimostrare accuratamente che tutti i campi di spezzamento trovati precedentemente sono estensioni semplici di $\mathbb{Q}$.

(h) Calcolare $[\mathbb{Q}_h : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}_g : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]$, $[\mathbb{Q}_f : \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})]$, $[\mathbb{Q}_h : \mathbb{Q}_g]$, $[\mathbb{Q}_h : \mathbb{Q}_f]$ *e* $[\mathbb{Q}_g : \mathbb{Q}_f]$.

(i) Determinare $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})}\mathbb{Q}_f$ *e la sua struttura.*

(j) Determinare $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}\mathbb{Q}_g$ *e la sua struttura.*

(k) Determinare $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_h$ *e la sua struttura.*

[†]Sfruttare sapientemente le relazioni di divisibilità trovate sopra.

(l) *Ordinare i gruppi di Galois calcolati nei punti precedenti in una catena crescente di gruppi (a meno di identificazioni).*

(m) *Inserire se posibile tra* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}_h$ *dei sottocampi intermedi di grado* 2, 3, 4, 5, 6 *e* 7.

(n) *Dire perchè il polinomio* $a(x) = x^7 - 10x^4 + 25x^3 - 15x + 5$ *è irriducibile su* $\mathbb{Q}$. *Può* $a(x)$ *avere una radice in* $\mathbb{Q}_h$? *Ed in* $\mathbb{Q}_g$?

Esercizio 19. *Calcolare il gruppo di Galois su* $\mathbb{Q}$ *e su* $\mathbb{R}$ *del polinomio*

$$f(x) = (x^2 - 20x + 100)^{13}(x^4 + 6x^2 + 9)^{19}(x^4 - 10x^2 + 25)^{17}(x^4 + 4x^2 + 4)^{23}.$$

Esercizio 20. *Costruire un polinomio che abbia gruppo di Galois isomorfo a* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. *Esplicitare tutti gli automorfismi del suo campo di spezzamento sul suo campo di definizione.*

Esercizio 21. *Si dia un rappresentante per le classi di isomorfismo dei seguenti quozienti:*

(a) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^{100}-1)}$;

(b) $\frac{\mathbb{C}[x]}{(\Phi_{100}(x))}$;

(c) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(\Phi_{100}(x))}$;

(d) $\frac{\mathbb{R}[x]}{(\Phi_{100}(x))}$;

(e) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(g(x))}$, $\frac{\mathbb{R}[x]}{(g(x))}$ *e* $\frac{\mathbb{C}[x]}{(g(x))}$, *dove* $g(x) = -\frac{5}{6} + \frac{5}{3}x^5 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{6}x^4$.

Esercizio 22. *Dimostrare che per ogni* $n \geqslant 2$ *il polinomio* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 1$ *è irriducibile in* $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Esercizio 23. *Sia* $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ *un polinomio di grado dispari irriducibile su* $\mathbb{Q}$. *Sia* α *una sua radice.*

(i) *Dimostrare che* $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha^2)$.

(ii) *Descrivere un algoritmo per calcolare il polinomio minimo di* α^2 *su* $\mathbb{Q}$ *a partire da* $f(x)$.

Esercizio 24. *Determinare il numero di radici reali dei seguenti polinomi di* $\mathbb{R}[x]$:

(a) $x^8 + 10x^3 + x - 4$;

(b) $x^7 + x^2 + x + 1$;

(c) $x^5 - 3x^2 - x + 1$;

(d) $x^4 + 15x^2 + 7x - 11$.

Esercizio 25. *Mostrare che se un polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha i primi k termini positivi e tutti i successivi negativi, allora esso ha esattamente una radice reale positiva reale.*

Esercizio 26. *Calcolare $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ il polinomio minimo di $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ su $\mathbb{Q}$. Determinare tutti i $\mathbb{Q}$ isomorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$.*

Esercizio 27. *Servendosi delle tavole di classificazione dei gruppi di ordine* 12 *e* 18 *determinare la struttura dei gruppi di Galois del polinomio $x^6 - 5x^3 + 6$ e del polinomio minimo di $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ su $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 28. *Ricordare la definizione di separabilità di un polinomio. Individuare tra i seguenti polinomi quelli separabili negli ambienti indicati:*

(i) $x^7 + 123x^4 - 65x^3 - 12 \log 3\, x^2 - \pi x + \sqrt{5} \in \mathbb{R}[x]$;

(ii) $\frac{3}{8}x^9 - \frac{7}{2}x^6 + 6x^3 - x + \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}[x]$;

(iii) $x^9 - x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$;

(iv) $x^9 - x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$;

(v) $\Phi_5(x) \in \mathbb{Q}[x]$;

(vi) $\Phi_5(x^5) \in \mathbb{Z}_2[x]$;

(vii) $\Phi_3(x^3) \in \mathbb{Z}_3[x]$;

(viii) $\Phi_3(x^6) \in \mathbb{Z}_2[x]$.

Verificare con la regola della derivata il risulato trovato per i polinomi dei punti (iii), (v) e (vii).

Esercizio 29. *Siano K un campo ed $f(x) \in K[x]$ un polinomio con almeno una componente irriducibile semplice. Dimostrare che il polinomio $F(x, y) = y^2 - f(x)$ è irriducibile in $K[x, y]$.*

Esercizio 30. *Siano K un campo ed $f(x) \in K[x]$ un polinomio separabile su K. Dimostrare che il polinomio $F(x, y) = y^2 - f(x)$ è irriducibile in $K[x, y]$.*

Esercizio 31. *Stabilire se i due risultati precedenti sono equivalenti. In caso negativo dire quale è più forte ed aggiungere alcune opportune ipotesi assumendo le quali diventano equivalenti.*