Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
16 Novembre 2010 - Esercitazione n.5
Antonio Cigliola

Esercizio 1. *Per ogni* $n \geqslant 1$ *fattorizzare gli anelli*

(i) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^n-1)}$,

(ii) $\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^n-1)}$,

(iii) $\frac{\mathbb{C}[x]}{(x^n-1)}$

come prodotto di estensioni semplici dei corrispondenti campi dei coefficienti.

Esercizio 2. *Fattorizzare* $\Phi_n(x)$ *in polinomi irriducibili su* $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. *Sia* F *un campo di caratteristica diversa da* 2. *Si supponga che* $m(x) = x^2 + bx + c$ *sia irriducibile su* F. *Sia* $d \overset{def}{=} b^2 - 4c$. *Mostrare che* $\frac{F[x]}{(m(x))}$ *e che* $\frac{F[x]}{(x^2-d)}$ *sono isomorfi. Costruire esplicitamente un isomorfismo tra essi.*

Esercizio 4. *Sia* $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ *e sia* K *un suo campo di spezzamento su* $\mathbb{F}_p$. *Sia* m *il minimo comune multiplo dei gradi dei fattori irriducibili di* $f(x)$ *su* $\mathbb{F}_p$. *Provare che* K *ha* p^m *elementi.*

Esercizio 5. *Stabilire se esistono polinomi di grado* $2, 3, \ldots, 10$ *irriducibili su* $\mathbb{F}_2$ *che si fattorizzano su* $\mathbb{F}_{64}$. *In caso affermativo determinarne almeno uno.*

Esercizio 6. *Stabilire se esistono polinomi di grado* $2, 3, \ldots, 10$ *irriducibili su* $\mathbb{F}_3$ *che si fattorizzano su* $\mathbb{F}_{243}$. *In caso affermativo determinarne almeno uno.*

Esercizio 7. *Sia* ζ *una radice primitiva* n*-esima dell'unità sul campo* F. *Sia* d *un divisore positivo di* n. *Provare che* ζ^k *è una radice primitiva* d*-esima dell'unità se e solo se* $\mathrm{MCD}(n, k) = \frac{n}{d}$.

Esercizio 8. *Sia* F *un ampliamento finito di* $\mathbb{Q}$. *Provare che* F *contiene un numero finito di radici complesse dell'unità.*

Esercizio 9. *Dimostrare che l'*n*-esimo polinomio ciclotomico su* $\mathbb{Z}_p$ *si ottiene dall'*n*-esimo polinomio ciclotomico su* $\mathbb{Z}$ *riducendo i suoi coefficienti modulo* p.

Esercizio 10. *Sia* $d \in \mathbb{Z}$ *un intero privo di fattori quadratici tale che* $|d| \geqslant 2$. *Dimostrare che* $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{8|d|})$.

Esercizio 11. *Per ciascuna delle seguenti estensioni determinare un ampliamento ciclotomico che le contiene:*

(i) $\mathbb{Q}(i)$;

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$;

(iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{-4})$;

(v) $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$;

(vi) $\mathbb{Q}(\sqrt{-6})$;

(vii) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$;

(viii) $\mathbb{Q}(\sqrt{-11} + \sqrt{-7})$;

(ix) $\mathbb{Q}(\sqrt{5} - \sqrt{-7})$;

(x) $\mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \sqrt{5})$;

(xi) $\mathbb{Q}(\sqrt{-11}, i)$;

(xii) $\mathbb{Q}(\sqrt{5} + i)$.

Esercizio 12. *Quali radici complesse dell'unità contiene ciascuna delle seguenti estensioni?*

(i) $\mathbb{Q}(i)$;

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$;

(iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{-4})$;

(v) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

Esercizio 13. *Siano* r *ed* s *due interi positivi coprimi tali che il loro prodotto sia* n. *Provare che ogni radice complessa* n*-esima dell'unità è prodotto di una radice* r*-esima e di una* s*-esima.*

Esercizio 14. *Per ogni intero positivo* $n \geqslant 1$ *si ponga*

$$\zeta_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Siano r *ed* s *due interi positivi e sia* $m = \mathrm{mcm}(r, s)$. *Provare che*

$$\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_r \zeta_s) = \mathbb{Q}(\zeta_r, \zeta_s).$$

In particolare se $\mathrm{MCD}(r, s) = 1$ *allora* $\mathbb{Q}(\zeta_{rs}) = \mathbb{Q}(\zeta_r \zeta_s) = \mathbb{Q}(\zeta_r, \zeta_s)$.

Esercizio 15. *Trovare il polinomio minimo di* $\zeta_{11} + \bar{\zeta}_{11}$ *su* $\mathbb{Q}$ *e provare che ha cinque radici reali. Determinarle.*

Esercizio 16. *Trovare il polinomio minimo di* $\zeta_9 + \bar{\zeta}_9$ *su* $\mathbb{Q}$ *e provare che ha tre radici reali. Determinarle.*

Esercizio 17. *Dimostrare che il polinomio minimo di* $\zeta_n + \bar{\zeta}_n$ *su* $\mathbb{Q}$ *ha radici tutte reali. Quante sono? Determinarle.*

Esercizio 18. *Sia* ζ *una radice settima primitiva dell'unità complessa. Per ciascuna delle seguenti quantità* α *calcolare il polinomio minimo su* $\mathbb{Q}$*:*

(i) $\alpha = \zeta + \zeta^5$;

(ii) $\alpha = \zeta^3 + \zeta^4$;

(iii) $\alpha = \zeta^6 + \zeta$;

(iv) $\alpha = \zeta^2$;

(v) $\alpha = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$;

(vi) $\alpha = \zeta + \zeta^3$;

(vii) $\alpha = \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta$;

(viii) $\alpha = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.

Esercizio 19. *Per ciscun* α *dell'esercizio precedente calcolare il polinomio minimo di* ζ *su* $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 20. *Sia* ζ *una radice ottava primitiva dell'unità complessa. Per ciascuna delle seguenti quantità* α *calcolare il polinomio minimo su* $\mathbb{Q}$*:*

(i) $\alpha = \zeta^5$;

(ii) $\alpha = \zeta + \zeta^7$;

(iii) $\alpha = \zeta^3 + \zeta^5$;

(iv) $\alpha = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta$;

(v) $\alpha = \zeta + \zeta^3$;

(vi) $\alpha = \zeta^2$;

(vii) $\alpha = \zeta^6$.

Esercizio 21. *Per ciscun* α *dell'esercizio precedente calcolare il polinomio minimo di* ζ *su* $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 22. *Sia* ζ *una radice undicesima primitiva dell'unità complessa. Per ciascuna delle seguenti quantità* α *calcolare il polinomio minimo su* $\mathbb{Q}$*:*

(i) $\alpha = \zeta^5$*;*

(ii) $\alpha = \zeta^{25}$*;*

(iii) $\alpha = \zeta^4 + \zeta^7$*;*

(iv) $\alpha = \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{10}$*;*

(v) $\alpha = \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{11}$*;*

(vi) $\alpha = \zeta\zeta^2 \dots \zeta^{11}$*;*

(vii) $\alpha = \zeta + \zeta^3 + \zeta^4 + \zeta^5 + \zeta^9$*;*

(viii) $\alpha = \zeta^{10} + \zeta$*.*

Esercizio 23. *Per ciscun* α *dell'esercizio precedente calcolare il polinomio minimo di* ζ *su* $\mathbb{Q}(\alpha)$*.*

Esercizio 24 (Gauss[†])**.** *Sia* $n = 19$ *e sia* ζ *una radice diciannovesima primitiva dell'unità complessa. Si fissi* $\bar{2}$ *come generatore del gruppo ciclico* $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$*. Si ponga* $18 = ef$*. Si considerino in* $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_n)$ *le* e *classi laterali determinate dalla congruenza modulo il sottogruppo ciclico* $\langle \bar{2}^e \rangle$ *(ciascuna di esse è costituita da* f *elementi). Sia* H *una di tali classi laterali e si costruisca il* periodo di Gauss *ad essa associato sommando tutte le potenze di* ζ *con esponenti presi in* H*, id est*

$$P_H = \zeta^{t_1} + \zeta^{t_2} + \cdots + \zeta^{t_f},$$

con $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_f \in H$*. Per ogni valore possibile di* f *si determini il polinomio minimo su* $\mathbb{Q}$ *degli* e *periodi di Gauss ad* f *termini che si possono costruire.*

Esercizio 25. *Siano* $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ *le radici* n*-esime complesse dell'unità. Sia* $k \geqslant 1$*. Provare che:*

(i) $\zeta_1^k + \cdots + \zeta_n^k = 0$ *se* n *non divide* k*;*

(ii) $\zeta_1^k + \cdots + \zeta_n^k = n$ *se* n *divide* k*;*

(iii) $\zeta_1^k \cdots \zeta_n^k = (-1)^{k(n-1)}$*.*

Esercizio 26. *Costruire il settimo polinomio ciclotomico su* $\mathbb{Z}_2$*, determinare tutte le sue radici e per ciascuna di esse il suo polinomio minimo su* $\mathbb{Z}_2$*.*

[†] Tratto dai primi articoli della sezione settima delle *Disquisitiones Arithmeticae* in cui Gauss risolve il problema della ciclotomia.

Esercizio 27. *Costruire il nono polinomio ciclotomico su $\mathbb{Z}_2$, determinare tutte le sue radici e per ciascuna di esse il suo polinomio minimo su $\mathbb{Z}_2$.*

Esercizio 28. *Costruire l'ottavo polinomio ciclotomico su $\mathbb{Z}_3$, determinare tutte le sue radici e per ciascuna di esse il suo polinomio minimo su $\mathbb{Z}_3$.*

Esercizio 29. *Costruire l'ottavo polinomio ciclotomico su $\mathbb{Z}_5$, determinare tutte le sue radici e per ciascuna di esse il suo polinomio minimo su $\mathbb{Z}_5$.*

Esercizio 30. *Costruire il quinto polinomio ciclotomico su $\mathbb{Z}_5$, determinare tutte le sue radici e per ciascuna di esse il suo polinomio minimo su $\mathbb{Z}_5$.*

Esercizio 31. *Sia dato il polinomio $f(x) = x^3+3x^2+2x \in \mathbb{Q}[x]$. Determinare il polinomio $f_k(x)$ che abbia per radici le potenze k-esime delle radici di $f(x)$, per i valori $k = 2, 3, 4$. Dire se i coefficienti di $f_2(x) \cdot f_3(x)$ sono funzioni simmetriche delle radici di $f(x)$.*

Esercizio 32. *Sia dato il polinomio $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Determinare il polinomio $f_k(x)$ che abbia per radici le potenze k-esime delle radici di $f(x)$, per i valori $k = -3, -2, -1, 2, 3, 4$. Dire se i coefficienti di $f_{-2}(x) \cdot f_3(x)$ sono funzioni simmetriche delle radici di $f(x)$ e determinarne alcuni.*

Esercizio 33. *Sia dato il polinomio $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Determinare il polinomio $f_k(x)$ che abbia per radici le potenze k-esime delle radici di $f(x)$, per i valori $k = -3, -2, -1, 2, 3, 4$. Dire se i coefficienti di $f_{-2}(x) \cdot f_{-3}(x)$ sono funzioni simmetriche delle radici di $f(x)$ e determinarne alcuni.*

Esercizio 34. *Risolvere i seguenti sistemi simmetrici:*

(i) $\begin{cases} x + y = 10 \\ -xy = 20 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ xy = 15 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 - x - y = 60 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x^3y + y^3x = 290 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y = 70 \\ xy = 12 \end{cases}$

(viii) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ xy = 2 \end{cases}$

(ix) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 22 \\ x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 85 \end{cases}$

(x) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x^2 + 9y^2 = 13 \end{cases}$

(xi) $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ xy = 6 \end{cases}$

(xii) $\begin{cases} x - y = -5 \\ -xy = 6 \end{cases}$

(xiii) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^3 - y^3 = 37 \end{cases}$

(xiv) $\begin{cases} 2x + 2y = -2 \\ (y - x)^2 - xy = 101 \end{cases}$

(xv) $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ xy = -4 \end{cases}$

(xvi) $\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 4x^2 + 4y^2 = 10 \end{cases}$

(xvii) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xyz = -2 \end{cases}$

(xviii) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$

(xix) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2yz + y^2xz + z^2xy = 0 \\ xyz + x + y + z = 0 \end{cases}$

(xx) $\begin{cases} x + y + z + t = \sqrt{2} + \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 7 \\ xyzt = -\sqrt{6} \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 - 2x - 2y - 2z - 2t = \sqrt{3} \end{cases}$

Esercizio 35. *Sia dato il polinomio* $f(x) = x^3 + \sqrt[4]{2}x + \sqrt{2} \in \mathbb{R}[x]$. *Siano* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ *le sue radici. Si dimostri che i seguenti numeri sono elementi di* $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$:

(i) $(\alpha^3 + 1)(\beta^3 + 1)(\gamma^3 + 1) - \alpha\beta\gamma$;

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha + \beta + \gamma$;

(iii) $(\alpha^2 - \alpha + 1)(\beta^2 - \beta + 1)(\gamma^2 - \gamma + 1)$.

Esprimere se possibile tali quantità in funzione dei coefficienti di $f(x)$.

Esercizio 36. *Dimostrare che ogni ampliamento quadratico di* $\mathbb{Q}$ *è contenuto in un ampliamento ciclotomico.*

Esercizio 37. *Mostrare che se un polinomio ha radici tutte reali, allora il suo discriminante è non negativo.*

Esercizio 38. *Mostrare che se un polinomio ha radici reali e distinte, allora il suo discriminante è strettamente positivo.*

Esercizio 39. *Mostrare che se un polinomio di terzo grado ha una sola radice reale, allora il suo discriminante è strettamente negativo.*

Esercizio 40. *Per ciascuno dei seguenti polinomi a coefficienti razionali dire se è irriducibile su* $\mathbb{Q}$, *calcolarne il discriminante, dire se ha campo di spezzamento reale e stabilire quale è il suo gruppo di Galois.*

(i) $x^3 - x + 1$;

(ii) $x^3 - x$;

(iii) $x^3 + 1$;

(iv) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

(v) $x^3 - 3x + 1$;

(vi) $x^3 - 4x + 2$;

(vii) $x^3 - 2$;

(viii) $x^3 + 27x - 4$;

(ix) $x^3 - 21x + 17$;

(x) $x^3 + x^2 - 2x - 1$;

(xi) $x^3 + x^2 - 2x + 1$.

Esercizio 41. *Dire per quali valori di* $a \in \mathbb{Q}$ *i seguenti polinomi di* $\mathbb{Q}[x]$ *hanno esattamente tre radici reali.*

(i) $x^3 + ax + 2$;

(ii) $x^3 + ax + a$.

Esercizio 42. *Dimostrare che un campo finito non ammette estensioni biquadratiche.*

Esercizio 43. *Calcolare* $\cos\frac{2\pi}{5}$ *e* $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Esercizio 44. *Fornire un criterio necessario e sufficiente affinché un polinomio biquadratico irriducibile a coefficienti razionali abbia solo radici reali.*

Esercizio 45. *Verificare che il polinomio*

$$f(x,y) = y^4 - 8x^2y^3 - 2x + 6xy^2 - 10x^2y$$

è irriducibile su $\in \mathbb{Q}[x,y]$.

Esercizio 46. *Siano* $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *e* $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *rispettivamente il determinante di Vandermonde ed il discriminante in* n *indeterminate. Provare che* $V(x_1, x_2, \dots, x_n)^2 = D(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Esercizio 47. *Dimostrare che un polinomio e la sua forma ridotta hanno lo stesso discriminante.*

Esercizio 48. *Sia* $f(x) \in F[x]$ *un polinomio di terzo grado. Mostrare che se* $f(x) = (x-a)g(x)$, *con* $a \in F$, *allora* $D(f) = cD(g)$ *per qualche* $c \in F$.

Esercizio 49. *Dimostrare che vale la seguente relazione tra il discriminante ed i polinomi simmetrici di Newton in* n *indeterminate:*

$$D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} n & p_1 & \dots & p_{n-1} \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1} & p_n & \dots & p_{2n-2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 50. *Dimostrare che tutte le derivate parziali di un polinomio simmetrico sono ancora polinomi simmetrici. Dedurre che l'anello dei polinomi simmetrici è un anello differenziale.*