

Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
7 Dicembre 2010 - Esercitazione n.6
Antonio Cigliola

Esercizio 1. *Senza passare per il calcolo diretto, dire a quale sottogruppo di S_4 è isomorfo il gruppo di Galois dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:*

(i) $x^4 + x^2 - 1$;

(ii) $x^4 + x^2 + 9$;

(iii) $x^4 - 30x^2 + 45$;

(iv) $x^4 - 7$;

(v) $x^4 - x^2 - 2$;

(vi) $x^4 + 2x^2 + 9$;

(vii) $x^4 - 10x^2 + 1$;

(viii) $x^4 + 20x^2 + 20$;

(ix) $x^4 - 10$;

(x) $x^4 - 100$;

(xi) $x^4 + 2x^2 + 16$;

(xii) $x^4 - 4x^2 + 16$;

(xiii) $x^4 - 5x^2 + 6$;

(xiv) $x^4 + 12x^2 + 12$;

(xv) $x^4 - 1$;

(xvi) $x^4 - 2x^2 + 36$;

(xvii) $x^4 + 10x^2 - 1$;

(xviii) $x^4 + 8x^2 + 8$;

(xix) $x^4 - 8x^2 + 8$;

(xx) x^4 ;

- (xxi) $x^4 - 2x^2 + 1$;
- (xxii) $x^4 + 2x^2 - 1$;
- (xxiii) $x^4 + 60x^2 + 90$;
- (xxiv) $x^4 + 2x^2 + 25$;
- (xxv) $x^4 + 50x^2 + 125$;
- (xxvi) $x^4 - 8x^2 + 16$;
- (xxvii) $x^4 - 6x^2 - 2$;
- (xxviii) $x^4 - 6x^2 + 9$;
- (xxix) $x^4 - 4x^2 + 49$;
- (xxx) $x^4 + 2x^2 - 100$.

Calcolare il gruppo di Galois dei polinomi precedenti verificando il risultato ottenuto per via teorica.

Esercizio 2. *Sia dato il polinomio $x^4 + a \in \mathbb{Q}[x]$. Dire per quali valori del parametro a il gruppo di Galois di f è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Cosa cambia se si lavora in $\mathbb{R}$? Ed in $\mathbb{C}$?*

Esercizio 3. *Dimostrare che i seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$ hanno gruppo di Galois totale:*

- (i) $x^3 + 2$;
- (ii) $200x^3 + 600x + 300$;
- (iii) $x^3 + 3x + 3000$;
- (iv) $x^5 + 3x^2 - 3x - 3$;
- (v) $x^5 + 5x^2 - 5x - 5$;
- (vi) $x^5 + 7x^2 - 7x - 7$;
- (vii) $x^5 + 4x^2 - 6x - 2$;
- (viii) $x^5 + px^2 - px - p$, con p primo;
- (ix) $x^5 - 3x^3 - 4x + 1$;
- (x) $x^5 - 3x^3 - 4x - 1$;
- (xi) $x^5 - 3x^3 - 4x + 2$;

- (xii) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x - 1$;
- (xiii) $x^5 + x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x + 1$;
- (xiv) $x^5 - 15x^3 - 16x - 1$;
- (xv) $x^5 - 15x^3 - 16x + 1$;
- (xvi) $x^5 - 8x^3 - 9x + 1$;
- (xvii) $x^7 - 4x^5 - x^3 + 4x + 1$;
- (xviii) $x^7 - 3x^5 - 6x^3 + 8x + 1$;
- (xix) $x^3 - 11x^2 + 11x - 11$;
- (xx) $x^3 + 101x + 101$.

Esercizio 4. Per ogni $n = 3, 4, 5, 6, 7, 10$ costruire un polinomio di $\mathbb{R}[x]$ con gruppo di Galois isomorfo ad S_n .

Esercizio 5. Per ciascuna delle seguenti estensioni di $\mathbb{Q}$ determinare un elemento primitivo ed una risolvente di Galois:

- (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$;
- (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{7})$;
- (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{2})$;
- (iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ con p e q primi;
- (v) $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r})$ con p, q ed r primi;
- (vi) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{5}, i)$;
- (vii) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i\sqrt{3})$;
- (viii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + i, \sqrt{5})$;
- (ix) $\mathbb{Q}(\sqrt{3} - i, \sqrt[3]{3})$;
- (x) $\mathbb{Q}(\zeta_{12}^4, \zeta_{12}^6)$.

Esercizio 6. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrare che $a + b$ ed ab sono numeri algebrici se e solo se anche a e b lo sono.

Esercizio 7. Mostrare che le radici dei seguenti polinomi di $\mathbb{R}[x]$ sono numeri algebrici su $\mathbb{Q}$:

- (i) $x^{10} - \sqrt[5]{3}x^7 + 6\sqrt[5]{81}x^3 - x + \sqrt[5]{27}$;

$$(ii) \ 5x^8 + 4\sqrt[3]{7}x^5 - \sqrt{2}x^3 + 2x + \sqrt{3} - 1;$$

$$(iii) \ x^{13} - \sqrt[4]{3}x^9 + 8\sqrt{3}x^7 - \sqrt{21}x^3 + 4x^2 - \sqrt{7}x + 6\sqrt{5} - 3.$$

Esercizio 8. *Provare che il campo delle funzioni razionali nell'indeterminata x su un campo F non è algebricamente chiuso.*

Esercizio 9. *Mostrare che un campo finito non può essere algebricamente chiuso.*

Esercizio 10. *Determinare i coniugati su $\mathbb{Q}$ dei seguenti numeri:*

$$(i) \ \sqrt[3]{2};$$

$$(ii) \ \sqrt{6};$$

$$(iii) \ \sqrt[4]{3} + 1;$$

$$(iv) \ \sqrt{3} + \sqrt{2};$$

$$(v) \ \zeta_9;$$

$$(vi) \ \zeta_{12}^4;$$

$$(vii) \ \zeta_7^5 + \zeta_7^2;$$

$$(viii) \ \sqrt[4]{5} + \sqrt{5};$$

$$(ix) \ i - 2\sqrt{3};$$

$$(x) \ \sqrt[3]{2} - \sqrt{2}.$$

Esercizio 11. *Costruire un'estensione di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ che non sia normale.*

Esercizio 12. *Costruire la chiusura normale in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi:*

$$(i) \ \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5});$$

$$(ii) \ \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6});$$

$$(iii) \ \mathbb{Q}(\sqrt{3} + i);$$

$$(iv) \ \mathbb{Q}(\sqrt{2} - i, \sqrt[3]{2});$$

$$(v) \ \mathbb{Q}(\zeta_{24}^{10}, \zeta_{24}^{16});$$

$$(vi) \ \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2});$$

$$(vii) \ \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{5});$$

$$(viii) \ \mathbb{Q}(\sqrt{2} - \sqrt{3}, \sqrt{5} - \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{5});$$

$$(ix) \ \mathbb{Q}(\zeta_7 + \bar{\zeta}_7);$$

$$(x) \quad \mathbb{Q}(\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4).$$

Esercizio 13. Siano $\alpha = \sqrt[3]{2}$, ζ una radice primitiva terza dell'unità e $K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$. Provare che $\alpha - \alpha\zeta$ è un elemento primitivo di K e che $\alpha + \alpha\zeta$ non lo è. Costruire una risolvente di Galois per K .

Esercizio 14. Sia $\mathcal{Q}$ l'insieme dei quadrati dei numeri interi. Dimostrare che per ogni scelta finita $m_1, m_2, \dots, m_t$ di elementi di $\mathbb{Z} \setminus \mathcal{Q}$ l'insieme $\mathbb{Q}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_t})$ è normale su $\mathbb{Q}$. La conclusione è ancora vera se si scelgono gli m_i in $\mathbb{Z}$?

Esercizio 15. Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ di $\mathbb{Q}$ per $n = 2, 3, \dots, 30$.

Esercizio 16. Illustrare la corrispondenza di Galois per i seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[x]$:

$$(i) \quad x^3 - 8;$$

$$(ii) \quad x^3 - 3x + 1;$$

$$(iii) \quad x^4 - 5x^2 + 6;$$

$$(iv) \quad x^4 + 8x^2 + 8;$$

$$(v) \quad x^4 + 3x^2 + 3;$$

$$(vi) \quad x^4 + x^2 + 4;$$

$$(vii) \quad (x^2 + 3)^{12}(x^2 + 1)^{13}(x^2 + 2)^7;$$

$$(viii) \quad x^3 + 1;$$

$$(ix) \quad x^3 + 3x^2 + 3x + 1;$$

$$(x) \quad x^4 + 9.$$

Esercizio 17. Determinare una risolvente di Galois su $\mathbb{Q}$ per tutti i campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ e le seguenti estensioni:

$$(i) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3});$$

$$(ii) \quad \mathbb{Q}(i, \sqrt{6}, \sqrt{5});$$

$$(iii) \quad \mathbb{Q}(\zeta_{24}^2);$$

$$(iv) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2});$$

$$(v) \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, i);$$

$$(vi) \quad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{3}).$$

Esercizio 18. *Illustrare la corrispondenza di Galois per il campo di spezzamento del polinomio $\Phi_n \in \mathbb{Q}[x]$ per $n = 1, 2, 3, \dots, 30$. Determinare una risolvente di Galois di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ sui sottocampi trovati.*

Esercizio 19. *Illustrare la corrispondenza di Galois per il campo di spezzamento del polinomio $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ per $n = 1, 2, 3, \dots, 30$. Costruire una risolvente di Galois su $\mathbb{Q}$ per i campi trovati.*

Esercizio 20. *Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{2^n}$ per $n = 1, 2, 3, \dots, 30$. Determinare una risolvente di Galois per gli ampliamenti intermedi $\mathbb{F}_2 \subseteq L$ ed $L \subseteq \mathbb{F}_{2^n}$.*

Esercizio 21. *Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_{3^n}$ per $n = 1, 2, 3, \dots, 30$. Determinare una risolvente di Galois per gli ampliamenti intermedi $\mathbb{F}_3 \subseteq L$ ed $L \subseteq \mathbb{F}_{3^n}$.*

Esercizio 22. *Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione $\mathbb{F}_5 \subseteq \mathbb{F}_{5^n}$ per $n = 1, 2, 3, \dots, 30$. Determinare una risolvente di Galois per gli ampliamenti intermedi $\mathbb{F}_5 \subseteq L$ ed $L \subseteq \mathbb{F}_{5^n}$.*

Esercizio 23. *Provare che in generale $1, \zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^{n-1}$ non costituiscono una base di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ su $\mathbb{Q}$. Esibirne una.*

Esercizio 24. *Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ sia normale su $\mathbb{Q}$. Mostrare che la restrizione a K del coniugio complesso è un automorfismo di K e verificare che il suo campo fisso è $\mathbb{Q}(\alpha\bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha})$.*

Esercizio 25. *Determinare $\mathfrak{Gal}_L(K)$, $\mathfrak{Gal}_M(K)$ e le loro strutture dove*

- (i) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15})$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ed $M = \mathbb{Q}(\sqrt{6})$;
- (ii) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$, $L = \mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ ed $M = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$;
- (iii) $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ ed $M = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$;
- (iv) $K = \mathbb{Q}(\zeta_{13})$, $L = \mathbb{Q}(\zeta_{13}^3)$ ed $M = \mathbb{Q}(\zeta_{13}^5 + \zeta_{13}^8)$;
- (v) $K = \mathbb{Q}(\zeta_{24})$, $L = \mathbb{Q}(\zeta_{24}^4)$ ed $M = \mathbb{Q}(\zeta_{24}^6)$.

Esercizio 26. *Mostrare che $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$ ha esattamente due sottocampi reali. Determinarli e fornire per essi un elemento primitivo.*

Esercizio 27. *Mostrare che $\mathbb{Q}(\zeta_{18})$ ha esattamente due sottocampi di grado tre su $\mathbb{Q}$. Determinarli e fornire per essi un elemento primitivo.*

Esercizio 28. *Mostrare che, se $c > 0$, il gruppo di Galois del polinomio $f(x) = x^3 + cx + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ è isomorfo ad S_3 . Esplicitare un tale isomorfismo.*

Esercizio 29. *Sia $f(x) = x^4 + ax^2 + c \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio biquadratico irriducibile. Sia G il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$. Mostrare che il campo fissato dal centro di G è $\mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - 4c}, \sqrt{c})$.*

Esercizio 30. *Elencare i possibili gruppi di Galois di polinomi di quarto grado riducibili su $\mathbb{Q}$. Fare la stessa cosa lavorando su un campo qualsiasi.*