Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2010-2011
Istituzioni di Algebra Superiore
14 Dicembre 2010 - Esercitazione n.7
Antonio Cigliola

Esercizio 1. *Calcolare il campo fissato dall'automorfismo di* $\mathbb{Q}(\pi)$ *che manda* π *in* $-\pi$.

Esercizio 2. *Calcolare il campo fissato dall'automorfismo di* $\mathbb{Q}(e)$ *che manda* e *in* e^2.

Esercizio 3. *Individuare quali dei seguenti numeri complessi sono costruibili con riga e compasso e presentare per questi una costruzione come catena crescente di estensioni quadratiche:*

(i) 1;

(ii) i;

(iii) $-i$;

(iv) π;

(v) $\sqrt{2}$;

(vi) $\sqrt[3]{2}$;

(vii) $\sqrt[4]{5}$;

(viii) $\sqrt[5]{2}$;

(ix) $\sqrt[8]{3}$;

(x) $\sqrt[16]{70}$;

(xi) $\sqrt[128]{129}$;

(xii) $\sqrt[4]{1+\sqrt{2+3\sqrt{3}}}$;

(xiii) $\sqrt[2]{-1+\sqrt[4]{3\sqrt{3}+5}}$;

(xiv) $\sqrt[3]{\sqrt{2+3\sqrt[3]{3}-1}}$;

(xv) $\sqrt{3\sqrt{3+3\sqrt{3}}}$;

(xvi) $\cos\frac{\pi}{4}$;

(xvii) $\cos\frac{\pi}{3}$;

(xviii) $\cos\frac{\pi}{5}$;

(xix) $\sin\frac{\pi}{8}$;

(xx) $\cos\frac{\pi}{6}$;

(xxi) $\sin\frac{\pi}{7}$;

(xxii) $\cos\frac{\pi}{10}$;

(xxiii) $\sqrt{1-2\cos\frac{\pi}{4}}$;

(xxiv) $\sqrt[3]{2+2\sin\frac{\pi}{8}}$;

(xxv) $\sqrt{\sqrt{2-2\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{10}}}}$;

(xxvi) $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

(xxvii) $\sqrt{1-\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}}}$;

(xxviii) $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$;

(xxix) $\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}+\cos\frac{\pi}{10}$;

(xxx) $\sqrt{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\cos\frac{\pi}{10}}$.

Esercizio 4. *Individuare tra le seguenti le equazioni a coefficienti razionali quelle risolubili per radicali, esplicitando per esse un metodo risolutivo:*

(i) $x^5-2x^3-8x-2=0$;

(ii) $x^2-1=0$;

(iii) $x^5+4x^3-5x+1=0$;

(iv) $x^3-1=0$;

(v) $x^7-x^5-16x^3+16x-1=0$;

(vi) $x^{100}-2=0$;

(vii) $x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$;

(viii) $x^7+1=0$;

(ix) $x^n-a=0$;

(x) $x^7 - 3x^5 - 6x^3 + 8x - 2 = 0$;

(xi) $x^7 - 2x^5 - 11x^3 + 12x - 1 = 0$;

(xii) $x^6 + 2x^4 + x^2 = 0$;

(xiii) $x^6 + x^4 - x^2 - 1 = 0$;

(xiv) $x^7 - 4x^5 - x^3 + 4x - 1 = 0$;

(xv) $x^3 + x + 1 = 0$;

(xvi) $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$;

(xvii) $x^7 - 2x^5 - 11x^3 + 12x - 2 = 0$;

(xviii) $x^5 + 2x^3 - 3x + 1 = 0$;

(xix) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

(xx) $x^4 - ax^3 + ax - 1 = 0$;

(xxi) $x^4 + ax^2 + b = 0$;

(xxii) $x^3 + x^2 + 3x + 4 = 0$;

(xxiii) $x^5 + 2x^3 - 3x - 1 = 0$;

(xxiv) $x^6 + ax^3 + b = 0$;

(xxv) $x^5 + 4x^3 - 5x - 1 = 0$;

(xxvi) $x^8 + ax^4 + b = 0$;

(xxvii) $x^5 + 3x^3 - 4x - 1 = 0$;

(xxviii) $x^3 + a = 0$;

(xxix) $x^{2n} + ax^n + b = 0$;

(xxx) $x^{4n} + ax^{3n} + bx^{2n} + cx^n + d = 0$.

Esercizio 5. *Dimostrare che nei polinomi reciproci di seconda specie di grado dispari non compare il termine centrale (quando sono ordinati secondo le potenze crescenti dell'incognita).*

Esercizio 6. *Dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ ammette sempre un sottocampo quadratico. Stabilire per quali n esso è un'estensione normale di $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 7. *Dire per quali valori di n il campo $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ contiene un'estensione di grado 3 su $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 8. *Sia p un numero primo. Dire per quali valori di n il campo $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ contiene un'estensione di grado p su $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 9. *Esplicitare la corrispondenza di Galois per il polinomio $x^6-5 \in \mathbb{Q}[x]$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{R}$. Indicare le estensioni normali.*

Esercizio 10. *Dimostrare che $\sin\frac{\pi}{24}$ è costruibile.*

Esercizio 11. *Determinare i sottocampi di $\mathbb{Q}(\zeta_{36})$ di grado 2 su $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 12. *Descrivere il reticolo dei sottocampi dell'estensione $\mathbb{Q}(\zeta_{24})$.*

Esercizio 13. *Dimostrare che il gruppo di Galois di un polinomio di grado n ha ordine che divide $n!$.*

Esercizio 14. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e ζ una radice primitiva n-esima dell'unità. Siano $G = \mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta))$ ed H un suo sottogruppo. Si definisca $\xi = \sum_{\sigma\in H}\sigma(\zeta)$. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\xi) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)^H$.*

Esercizio 15. *Dato un rettangolo, descrivere un metodo per costruire un quadrato con la stessa area.*

Esercizio 16. *Provare che se $f(x) = x^2+px+q$ ha discriminante non nullo, dette a e b le sue radici, allora $Aa+Bb$ è un elemento primitivo per il campo di spezzamento di f se e solo se $A \neq B$.*

Esercizio 17. *Sia F un campo e sia $f(x) \in F[x]$ un polinomio non costante di grado $n \geqslant 1$. Siano $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ le radici di $f(x)$. Provare che $f(x)$ è irriducibile su F se e solo se*

$$\prod_{\alpha_i\in T}(x-\alpha_i) \notin F[x]$$

per ogni sottoinsieme $\varnothing \subsetneq T \subsetneq \{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\}$.

Esercizio 18. *Dimostrare che x^4-8 è irriducibile su $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 19. *Dimostrare che x^6-72 è irriducibile su $\mathbb{Q}$.*

Esercizio 20. *Sia $F \subseteq K$ un'estensione di campi. Sia $0 \neq \alpha \in K$. Provare che α è algebrico su F se e solo se $\frac{1}{\alpha} = f(\alpha)$ per qualche polinomio $f(x) \in F[x]$.*

Esercizio 21. *Sia $F \subseteq K$ un'estensione di campi. Sia K un campo di spezzamento per un polinomio irriducibile e separabile $f(x) \in F[x]$. Per ogni radice $\alpha \in K$ di $f(x)$, sia $r(\alpha)$ il numero delle radici di $f(x)$ contenute in $F(\alpha)$.*

(i) Provare che $r(\alpha)$ è indipendente dalla radice α che si è scelta. Si chiami r tale valore comune.

(ii) *Sia d il numero dei campi distinti di tipo $F(\alpha)$, con α radice di $f(x)$. Provare che $dr = \deg f(x)$.*

(iii) *Fornire esempi in cui $r = 1$, $r = \deg f(x)$ e $1 < r < \deg f(x)$.*

Esercizio 22. *Siano p un numero primo ed n un intero non divisibile per p. Provare che*

$$\Phi_{np} = \frac{\Phi_n(x^p)}{\Phi_n(x)}.$$

Esercizio 23. *Sia ζ una radice primitiva n-esima dell'unità. Provare che $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ è l'unico sottocampo reale su cui $\mathbb{Q}(\zeta)$ ha grado due se e solo se $n = 4$, p^k, $2p^h$, con p primo dispari. Provare che ci sono esattamente tre sottocampi su cui $\mathbb{Q}(\zeta)$ ha grado due se $n = 2^t$, con $t \geqslant 3$.*

Esercizio 24. *Determinare tutti gli automorfismi del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi:*

(i) $x^5 - 1$;

(ii) $x^6 + 3$;

(iii) $x^8 - 2$.

Esercizio 25. *Verificare che il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^5 - 2$ è isomorfo al gruppo metaciclico di grado 5.*

Esercizio 26. *Sia N la chiusura normale di $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{3})$ in $\mathbb{C}$. Mostrare che $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(N)$ ha un sottogruppo normale ciclico di ordine 5 e determinare il suo campo fisso.*

Esercizio 27. *Determinare esplicitamente il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del polinomio $x^7 - 7 \in \mathbb{Q}[x]$ ed un sottogruppo di S_7 ad esso isomorfo.*

Esercizio 28. *Sia $n > 2$ e sia $f(x) = x^n - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Mostrare che se n e $\varphi(n)$ sono coprimi, allora il gruppo di Galois di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ ha ordine $n\varphi(n)$.*

Esercizio 29. *Mostrare che i polinomi reciproci di $\mathbb{Q}[x]$ di grado al più 8 sono risolubili per radicali. Fornire un metodo risolutivo.*

Esercizio 30. *Portare $\cos\frac{2\pi}{5}$ in forma radicale.*

Esercizio 31. *Portare $\cos\frac{2\pi}{7}$ in forma radicale.*

Esercizio 32. *Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio di quarto grado. Dimostrare che:*

(i) *$D(f) = 0$ se e solo se $f(x)$ ha due radici coincidenti;*

(ii) *$D(f) > 0$ se e solo se $f(x)$ ha radici semplici, tutte reali o tutte complesse;*

(iii) $D(f) < 0$ *se e solo se* $f(x)$ *ha radici semplici di cui due reali e due complesse.*

Esercizio 33. *Dire per quali* $3 \leqslant n \leqslant 500$ *il poligono regolare di* n *lati è costruibile con riga e compasso.*

Esercizio 34. *Provare che l'angolo* $\frac{\theta}{3}$ *è costruibile con riga e compasso se e solo se il polinomio* $4x^3 - 3x - \cos\theta$ *è riducibile su* $\mathbb{Q}(\cos\theta)$ *.*

Esercizio 35. *Discutere della possibilità della quintisezione di un angolo.*

Esercizio 36. *Un alieno che vive in uno spazio* n*-dimensionale vuole duplicare l'ipercubo con riga e compasso. Per quali valori di* n *lo può fare?*

Esercizio 37. *Decidere della possibilità di triplicare un angolo qualsiasi.*

Esercizio 38. *È vero che se* $(0, a)$ *non può essere costruito a partire da* $(1, 0)$ *e* $(0, 1)$*, allora* a *è trascendente su* $\mathbb{Q}$*?*

Esercizio 39. *Esplicitare un metodo per costruire con riga e compasso un triangolo equilatero di lato assegnato.*

Esercizio 40. *Esplicitare un metodo per inscrivere un quadrato in un cerchio.*

Esercizio 41. *Esplicitare un metodo per costruire con riga e compasso l'esagono regolare.*

Esercizio 42. *Esplicitare un metodo per costruire con riga e compasso il decagono regolare.*

Esercizio 43. *Esplicitare un metodo per costruire con riga e compasso l'icosagono regolare.*

Esercizio 44. *Mostrare che è sempre possibile bisecare un angolo con riga e compasso.*

Esercizio 45. *Costruire le radici di un polinomio biquadratico a coefficienti razionali.*

Esercizio 46. *Dimostrare che per* n *dispari il numero* $\sqrt[n]{2}$ *non è costruibile.*

Esercizio 47. *Stabilire se è possibile costruire un quadrato equivalente alla superficie di una sfera data.*

Esercizio 48. *Sia* $K \subseteq F$ *un'estensione normale di campi. Provare che un elemento* $\alpha \in K$ *di grado* r *su* F *ha al più* r *coniugati su* F*. Provare che questi sono esattamente* r *se e solo se* α *è separabile su* F*.*