A4 15mm10mm12mm10mm0mm10mm0mm10mm

Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
AL310 – Istituzioni di Algebra superiore
Seconda prova di valutazione in itinere

Esercizio 1. Si considerino i numeri reali $\alpha_1 := \sqrt{4+3\sqrt{3}}$, $\alpha_2 := \sqrt{4+2\sqrt{3}}$. Per $i = 1, 2$:

(i) si mostri che $\mathbf{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbf{Q}(\alpha_i)$, e si calcoli $[\mathbf{Q}(\alpha_i) : \mathbf{Q}(\sqrt{3})]$.

(ii) si dica quante e quali sono le $\mathbf{Q}-$immersioni $\mathbf{Q}(\alpha_i) \longrightarrow \mathbf{C}$. Quali fra esse estendono l'automorfismo di $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ tale che $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$?

(iii) si stabilisca se $\mathbf{Q}(\alpha_i)$ è normale su $\mathbf{Q}$.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio $f(T) := T^4 - 10T^2 + 20 \in \mathbf{Q}[T]$ e sia $K \subseteq \mathbf{C}$ il campo di spezzamento di $f(T)$ su $\mathbf{Q}$.

(i) Si calcoli $[K : \mathbf{Q}]$ e un elemento primitivo di K su $\mathbf{Q}$.

(ii) Dopo aver determinato il gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$, si illustri la corrispondenza di Galois, indicando, per ciascun campo intermedio fra $\mathbf{Q}$ e K, un elemento primitivo su $\mathbf{Q}$.

(iii) Si calcoli il gruppo di Galois dei seguenti polinomi

$$f(T)(T^2 - 5) \qquad f(T)(T^2 + 5) \qquad f(T)(T^3 - T - 2)$$

Esercizio 3. Sia $\zeta \in \mathbf{C}$ una radice primitiva ventiduesima dell'unità.

(i) Dopo aver determinato $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q})$, si illustri la corrispondenza di Galois.

(ii) Per ogni campo intermedio fra $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}(\zeta)$ si determini un elemento primitivo su $\mathbf{Q}$ e il suo polinomio minimo su $\mathbf{Q}$.

Esercizio 4.

(i) Si costruisca un campo K con 8 elementi.

(ii) Si determinino tutti e soli i polinomi irriducibili su $\mathbf{F}_2$ che hanno radici in K.

Esercizio 5. Sia $\omega \in \mathbf{C}$ una radice primitiva terza dell'unità e sia $K := \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \omega)$.

(i) Si determini il gruppo di Galois G di K su $\mathbf{Q}$.

(ii) Si dimostri che G si può immergere in $\mathbf{S}_4$.

(iii) Si trovino due sottogruppi di $\mathbf{S}_4$, dei quali esattamente uno sia transitivo, che siano isomorfi a G.

Esercizio 6. Sia $f(T) \in \mathbf{Q}[T]$ un polinomio irriducibile di quinto grado il cui discriminante sia un quadrato in $\mathbf{Q}$. Sia poi $G \subseteq \mathbf{S}_5$ l'immagine del gruppo di Galois di $f(T)$ su $\mathbf{Q}$, tramite qualche immersione in $\mathbf{S}_5$. Assumendo che G contenga un 3–ciclo, si determini G.