Università degli Studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica – a.a. 2012/2013
AL310 – Istituzioni di Algebra superiore
Preparazione alla seconda prova in itinere

Esercizio 0. Siano K un ampliamento di Galois di $\mathbf{Q}$ di grado dispari, $\kappa \in K$ un elemento primitivo di K su $\mathbf{Q}$ e $f(T) \in \mathbf{Q}[T]$ il polinomio minimo di κ su $\mathbf{Q}$. Si dimostri che $f(T)$ si decompone linearmente in $\mathbf{R}[T]$. [Suggerimento: si consideri la restrizione a K del coniugio complesso... ☺]

Esercizio 1. Si determini un polinomio $f(T) \in \mathbf{Q}[T]$ di grado 5 irriducibile in $\mathbf{Q}[T]$ con tutte radici reali e si descriva l'azione degli automorfismi del gruppo di Galois di $f(T)$ sulle radici di $f(T)$.

Esercizio 2. Sia $K \subseteq \mathbf{C}$ il campo di spezzamento del polinomio $T^4 - 5 \in \mathbf{Q}[T]$.

(i) Si determini un isomorfismo fra $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ e un gruppo noto.

(ii) Si trovino i sottocampi di K che sono normali su $\mathbf{Q}$, e si determini per ciascuno di essi un elemento primitivo.

Esercizio 3. Si dimostri che non esistono ampliamenti biquadratici di un campo finito.

Esercizio 4. Sia $f(T) \in \mathbf{Q}[T]$ un polinomio di quarto grado con tutte radici reali.

(i) Si verifichi che il discriminante $D(f)$ di $f(T)$ è non negativo.

(ii) Si dica quali sono i possibili gruppi di Galois di $f(T)$ su $\mathbf{Q}$, se $D(f)$ è un quadrato in $\mathbf{Q}$.

Esercizio 5. Siano $\omega \in \mathbf{C}$ una radice terza primitiva dell'unità, $K := \mathbf{Q}(\omega, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$.

(i) Si verifichi che $[K : \mathbf{Q}] = 12$.

(ii) Si mostri che K è un ampliamento normale di $\mathbf{Q}$.

(iii) Si determini la struttura del gruppo $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}(\sqrt{2}))$, si dica se è risolubile e in caso positivo se ne esibisca una serie risolvente.

(iv) Si illustri la corrispondenza di Galois per l'ampliamento $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) \subset K$, e si trovino i campi intermedi F tra $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ e K tali che F è normale su $\mathbf{Q}$.

(v) Si identifichi $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ con un prodotto diretto di gruppi noti.

Esercizio 6. Si consideri il polinomio $f := X^4 + X + 2 \in \mathbf{F}_3[X]$, e siano K un campo di spezzamento di f su $\mathbf{F}_3$, $\alpha \in K$ una radice di f.

(i) Si verifichi che f è irriducibile e separabile.

(ii) Si verifichi che esiste un unico automorfismo τ di $\mathbf{F}_3(\alpha)$ tale che $\tau(\alpha) = \alpha^3$.

(iii) Si trovi un elemento primitivo e il suo polinomio minimo su $\mathbf{F}_3$ per ciascun campo F tale che $\mathbf{F}_3 \subsetneq F \subsetneq K$.