Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
Istituzioni di Algebra Superiore AL310
26 Settembre 2012 - Tutorato n.1
Giulio Meleleo

Esercizio 1. *Determinare il quoziente e il resto della divisione di* $f(X)$ *per* $g(X)$ *nei seguenti casi:*

1. $f(X) = 5X^6 + 2X^4 - 3X^2 - 2$; $g(X) = -X^3 + 2X^2 + 5X - 7$ *in* $\mathbb{Z}[X]$;
2. $f(X) = 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 2X + 1$; $g(X) = 4X^3 + X^2 - X + 1$ *in* $\mathbb{F}_5[X]$.

È sempre possibile eseguire la divisione euclidea in $\mathbb{Z}[X]$*? E in* $\mathbb{F}_5[X]$*? In generale, quando è possibile?*

Esercizio 2. *Fattorizzare su* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ *e* $\mathbb{F}_2$ *i seguenti polinomi:*

1. $f(X) = X^5 + 2X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X - 4$;
2. $g(X) = X^5 - 3X^4 - X^3 + 3X^2 + 2X - 6$;
3. $h(X) = X^4 - X^2 - 1$.

Esercizio 3. *Costruire due polinomi in* $\mathbb{Z}[X]$ *rispettivamente di grado 2 e di grado 3 che siano riducibili su* $\mathbb{Z}$ *senza avere radici intere.*

Esercizio 4. *Mostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili in* $\mathbb{Q}[X]$:

1. $f(X) = X^3 + 6X^2 - 9X + 3$;
2. $g(X) = 10X^4 + 15X^3 - 20X^2 - 35X - 2$;
3. $h(X) = \frac{27}{4}X^{100} + \frac{18}{3}X^{62} - 9X^{17} + \frac{3}{2}$.

Esercizio 5. *Determinare il massimo comune divisore e una identità di Bezout per le seguenti coppie di polinomi:*

1. $f(X) = 2X^5 - 5X^3 - 4X^2 - 3X - 2; g(X) = 2X^4 - 7X^2 - 4$ *in* $\mathbb{Q}[x]$;
2. $p(X) = 3X^4 + X^3 + 3X^2 + 4X + 1; q(X) = 4X^3 + 2X^2 + 4X + 2$ *in* $\mathbb{F}_5[x]$.

Esercizio 6. *Sia* $p(X) = X^2 + tX + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$*. Stabilire per quali valori di* $t \in \mathbb{F}_5$ *l'anello quoziente* $\mathbb{F}_5[X]/ < p(X) >$ *è un campo.*

Esercizio 7. *Studiare al variare del parametro* $a \in \mathbb{Z}$ *la riducibilità del polinomio* $f(X) = 3X^3 + 20aX^2 + 50a^2X + 60 \in \mathbb{Z}[X]$ *su* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$.

Esercizio 8. *Fattorizzare su* $\mathbb{Q}$ *e su* $\mathbb{F}_2$ *il polinomio* $f(X) = X^4 - X^3 + X^2 + 1$.

Esercizio 9. *Sia* $a \in \mathbb{Z}$ *un elemento privo di fattori quadratici. Provare che per ogni* $n \geqslant 1$ *il polinomio* $X^n - a$ *è irriducibile su* $\mathbb{Q}$. *Cosa si può dire invece di* $X^n + a$*? E di* $X^n + a^nX^{n-3} + a$*, con* $n > 3$*?*

Esercizio 10. *Decomporre in irriducibili di* $\mathbb{C}[X,Y]$ *i polinomi*

1. $f(X,Y) = X^4 - 1$;
2. $g(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1$;
3. $h(X,Y) = -X^6 + X^3Y^2 - XY^3 + X^4Y$.

Esercizio 11. *Si consideri il polinomio* $f(X) = 2X^3 - 4X^2 + 3X - 3 \in \mathbb{Q}[X]$. *Decidere se nell'anello* $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(f(X))}$ *la classe dell'elemento* $6X^4 + X - 1$ *ammette o no inverso; in caso affermativo determinarlo.*

Esercizio 12. *Al variare di* $a \in \mathbb{F}_5$ *si consideri il polinomio*

$$f_a(X) = X^2 + aX + 2a + 1 \in \mathbb{F}_5[X].$$

Sia R_a *l'insieme quoziente di* $\mathbb{F}_5[X]$ *modulo* $(f_a(X))$.

1. *Costruire l'insieme* $A = \{a \in \mathbb{F}_5 \mid X + 1 \text{ non è divisore di } f_a(X)\}$;
2. *posto* $\psi_a = X + (f_a(X)) \in R_a$, *si costruisca l'insieme* B *degli elementi* $a \in \mathbb{F}_5$ *per cui* $\psi_a + 1$ *è invertibile in* R_a;
3. *determinare espilcitamente l'inverso* $\psi_0 + 1$;
4. *confrontare gli insiemi* A *e* B *e commentare il risultato ottenuto;*
5. *costruire l'insieme* $C \subset \mathbb{F}_5$ *costituito dagli* $a \in \mathbb{F}_5$ *per cui* R_a *è campo;*
6. *costruire l'insieme* $D \subset \mathbb{F}_5$ *costituito dagli* $a \in \mathbb{F}_5$ *per cui* R_a *è dominio;*
7. *confrontare gli insiemi* C *e* D *e commentare il risultato ottenuto;*
8. *determinare un elemento non nullo e non invertibile di* R_2;
9. *scelto un elemento* $a \in C$, *provare che* $f_a(X)$ *si spezza linearmente in* R_a;

Esercizio 13. *Dimostrare con tutti i dettagli che* $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1) \simeq \mathbb{Z}[i]$.