Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A 2012-2013
Istituzioni di Algebra Superiore AL310
10 Ottobre 2012 - Tutorato n.2
Giulio Meleleo

Esercizio 1. *Determinare per quali valori del numero intero k il polinomio $f(X) = X^4 - kX^2 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$.*

Esercizio 2. *Sia dato il polinomio*

$$f(X) = X^5 - X^3 - 6X - \frac{1}{3}X^4 + \frac{1}{3}X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X].$$

Si determinino, a meno di isomorfismo, gli anelli $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(f(X))}$, $\frac{\mathbb{R}[X]}{(f(X))}$, $\frac{\mathbb{C}[X]}{(f(X))}$. Quale tra questi anelli quozienti è un campo? Quale integro?

Esercizio 3. *Sia dato il polinomio $f(X) = X^4 + X^2 \in \mathbb{Q}[X]$. Si dica se $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(f(X))}$ è isomorfo a $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}(i)$; in caso negativo esibire un anello isomorfo a $\frac{\mathbb{Q}[X]}{(f(X))}$ fornendo tutti i dettagli.*

Esercizio 4. *Si esibisca una base del campo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ visto come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ e si dimostri che $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{9})$. Posto $\alpha = \sqrt[3]{3}$, portare in* forma canonica *gli elementi:*

(a) α^{-1};

(b) $\alpha^{-2} + 2\alpha^{-1} + 3\alpha^4 - 5$;

(c) $\alpha^5 - \alpha^4 - \alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha + 2$;

(d) $\frac{1}{\alpha^2-7\alpha+4}$;

(e) $\frac{2\alpha^2+\alpha-3}{\alpha^2-\alpha}$.

Esercizio 5. *Provare le seguenti uguaglianze tra campi:*

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\ \sqrt{6}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{6})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5},\ i) = \mathbb{Q}(i\sqrt[3]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}+i)$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{7}-2\sqrt{3}-10) = \mathbb{Q}(\sqrt{7},\ \sqrt{3})$;

(d) $\mathbb{Q}(\pi,\ \pi^2) = \mathbb{Q}(\frac{1}{\pi}) = \mathbb{Q}(\pi - \frac{1}{3})$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$.

Esercizio 6. *Descrivere esplicitamente gli elementi dei seguenti campi:*

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\ \sqrt{5})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7})$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6},\ i)$;

(d) $\mathbb{Q}(\frac{\sqrt{3}}{8},\ 2\sqrt{3} - 41)$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3},\ \sqrt{5})$;

(f) $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$;

(g) $\mathbb{Q}(i - \sqrt{5})$;

(h) $\mathbb{Q}(e,\ \sqrt{7})$;

(i) $\mathbb{Q}(\pi,\ \pi^2,\ 2\sqrt{8} - 6)$;

(j) $\mathbb{Q}(\sqrt{13},\ \sqrt{11},\ \log 2)$.

Esercizio 7. *Calcolare i seguenti gradi di ampliamenti di campi:*

(a) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$;

(b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})]$;

(c) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7} + i) : \mathbb{Q}]$;

(d) $[\mathbb{Q}(\pi,\ \sqrt[100]{5}) : \mathbb{Q}]$;

(e) $[\mathbb{Q}(\pi,\ \sqrt[101]{5}) : \mathbb{Q}(\pi)]$;

(f) $[\mathbb{Q}(\pi, \pi^2 - 3\pi + 1) : \mathbb{Q}(\pi^2)]$;

(g) $[\mathbb{Q}(\pi, \pi^2 - 3\pi + 1) : \mathbb{Q}(\pi)]$;

(h) $[\mathbb{Q}(e) : \mathbb{Q}(e^2)]$;

(i) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{3 + \sqrt{7}}}\right) : \mathbb{Q}\right]$;

(j) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5 - 2\sqrt{3 + \sqrt{7}}}\right) : \mathbb{Q}(\sqrt{7})\right]$;

(k) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5 - 2\sqrt{3 + \sqrt{7}}}\right) : \mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3 + \sqrt{7}}\right)\right]$;

(l) $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}\right) : \mathbb{Q}\right]$;

(m) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{3})\right]$;

(n) $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{i}{\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(o) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}-i,\ \frac{\sqrt{7}}{3}+9\right):\mathbb{Q}(\sqrt{7},\ i-2\sqrt{3})\right]$;

(p) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(q) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{6})\right]$.

Esercizio 8. *Siano* p *e* q *due primi distinti. Dimostrare che gli ampliamenti semplici* $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ *non sono isomorfi come campi. Cosa si può dire delle stesse strutture viste come* $\mathbb{Q}$*-spazi vettoriali?*

Esercizio 9. *Mostrare che* $\mathbb{Q}(\sqrt[s]{2},\ \sqrt[t]{3})=\mathbb{Q}(\sqrt[s]{2}\sqrt[t]{3})$ *per ogni* $s,\ t\geqslant 2$ *interi coprimi.*

Esercizio 10. *Sia* β *una radice del polinomio* $g(X)=X^4+1$*. Mostrare che* β *ha grado* 4 *su* $\mathbb{Q}$ *ma ha grado* 2 *su* $\mathbb{R}$*. Fattorizzare* $g(x)$ *su* $\mathbb{Q}$*,* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$*.*

Esercizio 11. *Dire se* $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt[3]{2}+1},\ \sqrt{3})$ *è un ampliamento biquadratico di* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$*.*

Esercizio 12. *Provare che il polinomio* $p(X)=X^2+X+1\in\mathbb{Z}_2[X]$ *è irriducibile su* $\mathbb{Z}_2$*. Costruire esplicitamente gli elementi del campo* $K=\frac{\mathbb{Z}_2[X]}{(X^2+X+1)}$ *e calcolare il suo grado su* $\mathbb{Z}_2$*. Calcolare i quadrati degli elementi di* K *e dedurre che in caratteristica* 2 *non vale la caratterizzazione data per gli ampliamenti quadratici in caratteristica diversa da* 2 *(Paragrafo* 3.5.1 *del libro di testo).*

Esercizio 13. *Stabilire se* $\mathbb{Q}(i+\sqrt{2})=\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$*.*

Esercizio 14. *Siano* K *un campo ed* a *e* b *elementi algebrici su* K*. Dire se* $[K(a,\ b):K(a)]$ *divide* $[K(b):K]$*. In caso negativo esibire un controesempio.*

Esercizio 15. *Siano* F *un campo ed* $\alpha=\frac{x^3}{x-1}\in F(x)$*. Mostrare che* α *è trascendente su* F *e che* x *è algebrico su* $F(\alpha)$*. Determinare il polinomio minimo di* x *su* $F(\alpha)$ *e* $[F(x):F(\alpha)]$*.*

Esercizio 16. *Per ciascuno dei seguenti numeri calcolare il polinomio minimo sui campi a fianco indicati:*

(a) $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *e* $\mathbb{Q}$;

(b) $\sqrt{3}-2\sqrt{7}$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ *e* $\mathbb{Q}$;

(c) $i\sqrt[4]{5}$ *su* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, $\mathbb{C}$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{5})$;

(d) π *su* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}(\pi^3)$;

(e) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2-i)$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$;

(f) $\cos 2\alpha$ *su* $\mathbb{Q}(\sin\alpha)$, $\mathbb{Q}(\cos\alpha)$ *ed* $\mathbb{R}$ †;

(g) π^3 *su* $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{Q}(\pi^2)$;

(h) $\sqrt[3]{7}-i$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{49})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}$ *ed* $\mathbb{R}$;

(i) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ *su* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3-\sqrt{2}})$, $\mathbb{C}$ *ed* $\mathbb{R}$.

(j) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ *su* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ *e* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

† si supponga che tutte le funzioni goniometriche con cui si lavora siano trascendenti su $\mathbb{Q}$.