Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A 2012-2013
Istituzioni di Algebra Superiore AL310
22 Ottobre 2012 - Tutorato n.3
Giulio Meleleo

Esercizio 1. *Mostrare che i polinomi* $X^4 - 9$ *e* $X^4 - 2X^2 - 3$ *hanno lo stesso campo di spezzamento in* $\mathbb{C}$

Esercizio 2. *Costruire i campi di spezzamento in* $\mathbb{C}$ *dei polinomi* $X^2 - 5$ *e* $X^5 + 2$*. Costruire inoltre il loro composto e determinarne il grado su* $\mathbb{Q}$.

Esercizio 3. *Determinare tutti gli isomorfismi in* $\mathbb{C}$ *dei seguenti campi e stabilire quali tra essi sono automorfismi:*

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$;

(d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$.

Esercizio 4. *Sia* $F \subseteq K$ *un ampliamento di campi. Siano* $\alpha, \beta \in K$ *algebrici su* F *di gradi rispettivamente* m *ed* n*, tali che* $\mathrm{MCD}(m, n) = 1$*. Provare che:*

(i) $[F(\alpha, \beta) : F] = mn$;

(ii) $F(\alpha) \cap F(\beta) = F$

(iii) $F(\alpha, \beta) = F(\alpha + \beta)$.

Siano $p(X)$ *e* $q(X)$ *i polinomi minimi su* F *di* α *e* β *rispettivamente. Provare che:*

(iv) $q(X)$ *non ha radici in* $F(\alpha)$ *e che* $p(X)$ *non ha radici in* $F(\beta)$.

(v) $q(X)$ *è irriducibile su* $F(\alpha)$ *e che* $p(X)$ *è irriducibile su* $F(\beta)$;

Esercizio 5. *Determinare il campo di spezzamento in* $\mathbb{C}$ *dei seguenti polinomi sul loro campo di definizione. Inoltre, determinare il grado su* $\mathbb{Q}$ *di ciascuno dei campi trovati.*

(a) $X^4 + 2X^2 + 9$;

(b) $X^3 - 1$;

(c) $X^3 + 1$;

(d) $X^4 - 2$;

(e) $X^4 - 2X^2 + 49$;

(f) $X^5 - 1$;

(g) $X^5 - 3X^3 + 3X^2 - 9$;

(h) $X^5 - 3X^4 + 3X^3 - X^2 + \sqrt{5}X^3 - 3\sqrt{5}X^2 + 3\sqrt{5}X - \sqrt{5}$;

(i) $X^3 + 2iX^2 + X + 2i$;

(j) $3X^7 - (4\sqrt{3}+9)X^6 + (15+12\sqrt{3})X^5 - (21+16\sqrt{3})X^4 + (21+16\sqrt{3})X^3 - (15+12\sqrt{3})X^2 + (4\sqrt{3}+9)X - 3$;

(k) $X^4 - 2X^2 + 3$;

(l) $X^4 - 5X^2 + 6$;

(m) $X^4 - 6X^2 + 1$;

(n) $X^4 - X^3 - 3X + 3$;

(o) $2X^5 - 7X^4 + 9X^3 - 7X^2 + 2X$;

(p) $X^6 - 3X^3 + 2$.

Esercizio 6. *Determinare per ciascuno dei seguenti polinomi di $\mathbb{F}_p[X]$ un campo di spezzamento su $\mathbb{F}_p$, per i valori di p a fianco indicati. Inoltre, determinare il grado su $\mathbb{F}_p$ di ciascuno dei campi di spezzamento trovati.*

(a) $X^3 + 2X + 1$, $p = 3$;

(b) $X^3 + 2X + 1$, $p = 5$;

(c) $X^4 + 5$, $p = 2$;

(d) $X^4 + 5$, $p = 3$;

(e) $X^4 + 5$, $p = 5$;

(f) $X^4 + 5$, $p = 7$;

(g) $X^3 + X + 1$, $p = 2$;

(h) $X^3 + X^2 + 1$, $p = 2$;

(i) $X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$[†], $p = 2$;

(j) $X^4 - X^3 - X - 1$, $p = 3$;

[†]Si suggerisce di calcolare il prodotto dei polinomi del punto *(g)* e del punto *(h)*...

(k) $X^4 + X + 1$, $p = 2$;

(l) $X^3 - 3$, $p = 7$;

(m) $X^3 - 5$, $p = 13$;

(n) $X^4 + X^2 + X^3 + X + 1$, $p = 2$.

Esercizio 7. *Determinare tutti gli automorfismi del campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi di $\mathbb{Q}[X]$:*

(a) $X^2 + X + 2$;

(b) $X^3 - 7$;

(c) $X^4 + X^2 + 2X + 2$;

(d) $X^4 - 5X^2 + 6$;

(e) $X^5 + X^3 + X^2 + 1$;

(f) $X^6 - 3X^3 + 2$;

(g) $X^6 - 8X^3 + 7$.

Esercizio 8. *Siano K ed L rispettivamente i campi di spezzamento su $\mathbb{F}_5$ dei polinomi X^2+X+1 ed X^2+4X+1 di $\mathbb{F}_5[X]$. Mostrare che K ed L sono isomorfi e determinare tutti i possibili isomorfismi tra essi.*

Esercizio 9. *Siano K ed L rispettivamente i campi di spezzamento su $\mathbb{F}_2$ dei polinomi X^3+X+1 ed X^3+X^2+1 di $\mathbb{F}_2[X]$. Mostrare che K ed L sono isomorfi e determinare tutti i possibili isomorfismi tra essi.*

Esercizio 10. *Nel campo $\mathbb{C}$ siano A l'insieme delle radici primitive ottave dell'unità e B l'insieme delle radici quarte dell'unità negativa. Dimostrare che $A = B$.*

Esercizio 11. *Sia $\zeta := \zeta_7$ la radice settima primitiva dell'unità. Determinare il grado dei seguenti elementi su $\mathbb{Q}$:*

(a) $\zeta + \zeta^5$;

(b) $\zeta^3 + \zeta^4$;

(c) $\zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$.

Esercizio 12. *Per ogni $1 \leqslant n \leqslant 20$ calcolare $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Determinare l'$n$-simo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$ e il suo grado.*

Esercizio 13. *Dimostrare che per ogni $n \geqslant 3$ $\Phi_n(X)$ ha grado pari.*

Esercizio 14. *Dimostrare che per ogni* $n \geqslant 1$ $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$. *Dimostrare che* $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\zeta_6)$. *Esplicitare* $\mathbb{Q}(\zeta_4)$ *e* $\mathbb{Q}(\zeta_8)$. *Dedurre che sebbene* $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$, *tuttavia in generale non vale l'inclusione contraria.*

Esercizio 15. *Dimostrare che per ogni* $m, n \geqslant 1$ *tali che* $m \mid n$ *allora* $\mathbb{Q}(\zeta_m) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Esercizio 16. *Al variare di* $n \in \mathbb{N}^*$, *si consideri l'insieme* $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

(i) *Dimostrare che* $\mathbb{C}_n$ *è un sottogruppo di* $\mathbb{C}$.

(ii) *Provare che* $\mathbb{C}_n$ *è isomorfo a* $\mathbb{Z}_n$. *Dedurre che si tratta di un gruppo ciclico e dire quali e quanti sono i suoi generatori.*

(iii) *Dimostrare che se* $m \mid n$ *allora* $\mathbb{C}_m \subset \mathbb{C}_n$.

(iv) *Siano* $m, n \geqslant 1$ *interi distinti. Dire se* $\mathbb{C}_m \cup \mathbb{C}_n = \mathbb{C}_{mn}$.