Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
Istituzioni di Algebra Superiore AL310
7 Novembre 2012 - Tutorato n.4
Giulio Meleleo

Esercizio 1. *Può un automorfismo di* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ *che manda* $\sqrt{2}$ *in* $-\sqrt{2}$ *essere esteso ad un automorfismo di* $\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{2}})$*? In quanti modi?*

Esercizio 2. *Può un automorfismo di* $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ *che manda* $\sqrt{6}$ *in* $-\sqrt{6}$ *essere esteso ad un automorfismo di* $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$*? In quanti modi?*

Esercizio 3. *Sia* $\omega \neq 1$ *una radice cubica primitiva dell'unità in* $\mathbb{C}$*. Può un automorfismo di* $\mathbb{Q}(\omega)$ *mandare* ω *in* $-\omega$*?*

Esercizio 4. *Sia* $\omega \neq 1$ *una radice quinta primitiva dell'unità in* $\mathbb{C}$*. Può un automorfismo di* $\mathbb{Q}(\omega)$ *mandare* ω *in* $-\omega$*? E in* ω^{-1}*?*

Esercizio 5. *Determinare tutti gli automorfismi di* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},\zeta_3)$ *(*ζ_3 *è una radice terza primitiva dell'unità) su:*

1. $\mathbb{Q}$;
2. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$;
3. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$;
4. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3})$;
5. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\zeta_3)$;
6. $\mathbb{Q}(\zeta_3)$.

Esercizio 6. *Determinare il numero degli automorfismi di* K *dove* K *è il campo di spezzamento su* $\mathbb{Q}$ *del polinomio dato:*

1. X^4+X^2+1;
2. X^3+2X-1;
3. X^4+1;
4. $(X^2+2X-1)^2(X^3-2)^6$;
5. $(X^2-5X+6)^{17}(X^3+3X^2+3X+1)^6(X^6-9X^3+8)^{23}$.

Esercizio 7. *Determinare le radici seste dell'unità di* $\mathbb{F}_5$*. Selezionare tra esse quelle che sono primitive e scrivere il sesto polinomio ciclotomico su* $\mathbb{F}_5$*. Costruire il sesto ampliamento ciclotomico di* $\mathbb{F}_5$ *e provare che è isomorfo ad* $\mathbb{F}_{25}$*; determinare tutti i suoi sottocampi.*

Esercizio 8. *Calcolare le radici centoventottesime primitive dell'unità di* $\mathbb{F}_2$.

Esercizio 9. *Sia* K *un campo di caratteristica* p. *Mostrare che, se* p *non divide* n, *l'*n*-esimo polinomio ciclotomico su* K *si ottiene dall'*n*-esimo polinomio ciclotomico* $\Phi_n(X)$ *su* $\mathbb{Q}$ *riducendo i suoi coefficienti modulo* p.

Esercizio 10. *Determinare tutti gli isomorfismi in* $\mathbb{C}$ *dei seguenti campi specificando quali tra essi sono automorfismi:*

1. $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$;
2. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$;
3. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$;
4. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{11})$;
5. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt{17}, \zeta_3)$.

Esercizio 11 (Ripasso sul gruppo simmetrico S_n)**.** *Descrivere il gruppo simmetrico* S_n *per* $n = 2, 3, 4$. *Dire che tipo di sottogruppi ha e quali tra questi sono sottogruppi normali.*

Esercizio 12. *Calcolare* $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ *il polinomio minimo di* $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ *su* $\mathbb{Q}$. *Determinare tutti i* $\mathbb{Q}$*-isomorfismi di* $\mathbb{Q}(\alpha)$ *in* $\mathbb{C}$.