Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
Istituzioni di Algebra Superiore AL310
21 Novembre 2012 - Tutorato n.5
Giulio Meleleo

Esercizio 1. *Mostrare che le radici del polinomio* $X^{2012} - \sqrt[7]{2}X^{11} + \sqrt{5}X^3 - \sqrt{13} \in \mathbb{R}[X]$ *sono algebriche su* $\mathbb{Q}$.

Esercizio 2. *Mostrare che* $1 + 2\sqrt{11} - 3\sqrt{5}$ *è un numero algebrico.*

Esercizio 3. *Sia* $F \subseteq K$ *un ampliamento algebrico di campi e sia* A *un anello tale che* $F \subseteq A \subseteq K$. *Mostrare che* A *è un campo.*

Esercizio 4. *Determinare i coniugati su* $\mathbb{Q}$ *di* $\theta := \sqrt[4]{2}$; $1 + \theta$; $\theta + \theta^2$.

Esercizio 5. *Sia* $F \subseteq K$ *un ampliamento di campi di grado* n *e sia* $\alpha \in K$. *Mostrare che se esistono* n F*-isomorfismi* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *di* K *nella chiusura algebrica* $\bar{F}$ *di* F *tali che* $\varphi_i(\alpha) \neq \varphi_j(\alpha)$ *per* $i \neq j$ *allora* $K = F(\alpha)$.

Esercizio 6. *Sia* ξ *una radice primitiva undicesima dell'unità. Determinare i coniugati su* $\mathbb{Q}$ *di* $\alpha := \xi + \xi^{-1}$.

Esercizio 7. *Siano* $\alpha := \sqrt[3]{2}$, $\xi \in \mathbb{C}$ *una radice terza primitiva dell'unità e* $K := \mathbb{Q}(\alpha, \xi)$. *Dimostrare che* $\alpha - \alpha\xi$ *è un elemento primitivo per* K *su* $\mathbb{Q}$ *mentre* $\alpha + \alpha\xi$ *non lo è.*

Esercizio 8. *Determinare un elemento primitivo per i sequenti ampliamenti di* Q:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[4]{2})$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5})$;

(d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2})$.

Esercizio 9. *Stabilire quali tra i seguenti polinomi sono separabili su* $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$:

(a) $X^3 + 1$;

(b) $X^2 - 2X + 1$;

(c) $6X^2 + X + 1$;

(d) $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$*;*

(e) $X^9 + X^3 + 1$.

Esercizio 10. *Sia K un campo finito con p^n elementi. Mostrare che ogni elemento di K ha un'unica radice p-esima.*

Esercizio 11 (Un po' di teoria dei gruppi)**.** *Mostrare che ogni gruppo di ordine pq, dove p e q sono due primi tali che $p < q$ e q non divide $p - 1$, è un gruppo ciclico.*

Esercizio 12 (Ancora un po' di teoria dei gruppi)**.** *Mostrare che il gruppo alterno A_5 è semplice (hint: dopo averle calcolate, usare le cardinalità delle classi di coniugio).*