Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
Istituzioni di Algebra Superiore AL310
10 Dicembre 2012 - Tutorato n.6
Giulio Meleleo

Esercizio 1. *Costruire un polinomio che abbia gruppo di Galois isomorfo a* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$*. Esplicitare tutti gli automorfismi del suo campo di spezzamento sul suo campo di definizione.*

Esercizio 2. *Per ciascuna delle seguenti estensioni di* $\mathbb{Q}$ *determinare un elemento primitivo e il suo polinomio minimo su* $\mathbb{Q}$*:*

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$;

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{10}, \sqrt{7})$;

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{2})$;

(iv) $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ *con* p *e* q *primi;*

(v) $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r})$ *con* p, q *ed* r *primi;*

(vi) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{5}, i)$;

(vii) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i\sqrt{3})$;

(viii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+i, \sqrt{5})$;

(ix) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}-i, \sqrt[3]{3})$;

(x) $\mathbb{Q}(\zeta_{12}^4, \zeta_{12}^6)$.

Esercizio 3. *Costruire un'estensione di* $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ *che non sia normale.*

Esercizio 4. *Mostrare che* $\mathbb{Q}(\zeta_{15})$ *ha esattamente due sottocampi reali. Determinarli e fornire per essi un elemento primitivo.*

Esercizio 5. *Sia* K *il campo di spezzamento in* $\mathbb{C}$ *del polinomio* $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$*. Calcolare il gruppo di Galois di* K *su* $\mathbb{Q}$ *ed esplicitare la corrispondenza di Galois quando* $f(X)$ *è uno dei seguenti polinomi:*

(i) X^2+3;

(ii) $(X^2+3)(X^2-2)$;

(iii) X^3-5;

(iv) $X^3 - 8$;

(v) $X^3 - 3X + 1$;

(vi) $X^4 - 5X^2 + 6$;

(vii) $X^4 + 8X^2 + 8$;

(viii) $X^4 + 3X^2 + 3$;

(ix) $X^4 + X^2 + 4$;

(x) $(X^2 + 3)^{12}(X^2 + 1)^{13}(X^2 + 2)^7$;

(xi) $X^3 + 1$;

(xii) $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$;

(xiii) $X^4 + 9$;

(xiv) $X^5 + 1$;

(xv) $X^{11} - 1$.

Esercizio 6. *Siano* $K := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ *e* $M := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$. *Determinare* $\mathrm{Gal}_L(K)$, $\mathrm{Gal}_M(K)$ *ed i loro campi fissi.*

Esercizio 7. *Siano* $p_1, \dots, p_n$ *numeri primi distinti e sia* $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$. *Mostrare che l'ampliamento* $\mathbb{Q} \subseteq K$ *è di Galois e determinare il suo gruppo di Galois. Esplicitare inoltre la corrispondenza di Galois per* $n = 1, 2, 3$.

Esercizio 8. *Sia* $f(X) := X^4 + 2X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ *e sia* K *un suo campo di spezzamento su* $\mathbb{F}_3$. *Determinare* $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_3}(K)$ *ed esplicitare la corrispondenza di Galois.*

Esercizio 9. *Sia* $\xi \in \mathbb{C}$ *una radice primitiva nona dell'unità. Determinare il polinomio minimo su* $\mathbb{Q}$ *di* $\alpha := \xi + \xi^{-1} + 1$.

Esercizio 10 (Determinante di Vandermonde)**.** *Sia* $K[X_1, \dots, X_n]$ *l'anello dei polinomi in* n *indeterminate a coefficienti in* K. *Data la matrice*

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ X_1^2 & X_2^2 & \dots & X_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

si indichi con $V(X_1, \dots, X_n)$ *il determinante di* M. *Dimostrare che* $V(X_1, \dots, X_n) = \prod_{1 \le i < j \le n}(X_i - X_j)$. *(Suggerimento: Si proceda per induzione su* n *e si usino le operazioni elementari su righe e colonne della matrice.)*

Esercizio 11. *Calcolare il discriminante del polinomio* $f(X) := X^3+pX+q \in \mathbb{Q}[X]$

Esercizio 12. *Calcolare il discriminante del polinomio* $g(X) := X^4+bX^2+c \in \mathbb{Q}[X]$

Esercizio 13 (Polinomi simmetrici)**.** *Dire se i seguenti polinomi in* $\mathbb{Z}[\boldsymbol{X}]$ *sono simmetrici e, in caso positivo, scriverli come polinomi valutati nelle funzioni simmetriche elementari:*

i $f(X_1, X_2, X_3) = X_1^2X_2 + X_1^2X^3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2$;

ii $g(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2X_2 + X_1^2X^3 + X_2^2X_1 + X_2^2X_3 + X_3^2X_1 + X_3^2X_2$;

iii $h(X_1, X_2, X_3) = X_1^3X_2^3 + X_1^3X_3^3 + X_2^3X_3^3$.

Esercizio 14. *Determinare un intero* $n > 2$ *tale che* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ *sia contenuto nell'*n*-esimo ampliamento ciclotomico di* $\mathbb{Q}$*, per* $d = 3, 6, 11$.