Università degli studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2012-2013
Istituzioni di Algebra Superiore AL310
19 Dicembre 2012 - Tutorato n.7
Giulio Meleleo

Esercizio 1. *Sia dato il polinomio* $X^4 + a \in \mathbb{Q}[X]$*. Dire per quali valori del parametro* a *il gruppo di Galois di* f *è isomorfo a* $\mathbb{Z}_4$*. Cosa cambia se si lavora in* $\mathbb{R}$*? Ed in* $\mathbb{C}$*?*

Esercizio 2. *Provare che il campo delle funzioni razionali nell'indeterminata* X *su un campo* F *non è algebricamente chiuso.*

Esercizio 3. *Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione* $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ *di* $\mathbb{Q}$ *per* $n = 2, 3, \dots, 30$.

Esercizio 4. *Illustrare la corrispondenza di Galois per l'estensione* $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{2^n}$ *per* $n = 1, 2, 3, \dots, 30$*.*

Esercizio 5. *Mostrare che* $\mathbb{Q}(\zeta_{18})$ *ha esattamente due sottocampi di grado tre su* $\mathbb{Q}$*. Determinarli e fornire per essi un elemento primitivo.*

Esercizio 6. *Mostrare che, se* $c > 0$*, il gruppo di Galois del polinomio* $f(X) = X^3 + cX + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ *è isomorfo ad* S_3*. Esplicitare un tale isomorfismo.*

Esercizio 7. *Elencare i possibili gruppi di Galois di polinomi di quarto grado riducibili su* $\mathbb{Q}$*.*

Esercizio 8. *Verificare che il gruppo di Galois su* $\mathbb{Q}$ *del polinomio* $X^5 - 2$ *è isomorfo al gruppo metaciclico di grado* 5*.*

Esercizio 9. *Sia* $n > 2$ *e* $f(X) := X^n - 2$*. Mostrare che, se* $(n, \varphi(n)) = 1$*, allora il gruppo di Galois di* $f(X)$ *su* $\mathbb{Q}$ *ha ordine* $n\varphi(n)$*.*

Esercizio 10. *Calcolare il gruppo di Galois su* $\mathbb{Q}$ *del polinomio* $X^{pq} - 2$ *dove* p, q *sono numeri primi dispari distinti.*

Esercizio 11. *Siano* p *un numero primo,* F *un campo numerico contenente tutte le radici* p*-esime dell'unità e* $f(X) := X^p - a \in F[X]$*. Mostrare che, se* $f(X)$ *è riducibile su* F*, allora* F *è il campo di spezzamento di* $f(X)$*.*

Esercizio 12. *sia* p *un numero primo e sia* F *un campo numerico contenente tutte le radici* p*-esime dell'unità. Mostrare che, se* $K := F(\alpha)$ *è tale che* $\alpha^p \in F$*, allora* K *è un ampliamento di Galois di* F *e, se* $K \neq F$*, il suo gruppo di Galois è ciclico di ordine* p*.*