Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
28 Ottobre 2013
Prima prova di valutazione in itinere

Al candidato è richiesto di risolvere il maggior numero possibile di esercizi, spiegando esaurientemente ogni risposta data. Non è consentito l'uso di calcolatrici, telefoni cellulari, libri di testo né appunti. Non è permesso lasciare l'aula prima della consegna dell'elaborato. Si ricorda che la prova ha carattere strettamente individuale.

Esercizio 1. Si consideri il polinomio

$$f(x) = \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 6 \in \mathbb{Q}[x].$$

(a) Fattorizzare $f(x)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(b) Determinare il campo di spezzamento di $f(x)$ in $\mathbb{C}$.

(c) Fattorizzare il polinomio $g(x) \overset{\text{def}}{=} 4 \cdot f(x)$ in polinomi irriducibili su $\mathbb{Z}$.

Esercizio 2. Siano $m, n \geqslant 2$ due interi coprimi. Sia $f(x) = 2x^n - 2^{m+1} \in \mathbb{Z}[x]$.

(a) Dimostrare che

$$\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{2^m}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{2}\right).$$

(b) Stabilire se $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

(c) Completare il campo $\mathbb{Q}\left(\sqrt[n]{2}\right)$ ad un campo di spezzamento di $f(x)$ in $\mathbb{C}$.

Esercizio 3. Sia $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ una radice quinta primitiva dell'unità complessa. Si ponga $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{3}, \zeta_5\right)$.

(a) Determinare il polinomio minimo di $\sqrt[5]{3}$ su $\mathbb{Q}$ e stabilire se esso è irriducibile su $\mathbb{Z}$.

(b) Determinare il polinomio minimo di ζ_5 su $\mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{3}\right)$.

(c) Calcolare $[F : \mathbb{Q}]$ e determinare $\mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{3}\right) \cap \mathbb{Q}\left(\zeta_5\right)$.

(d) Provare che $F = \mathbb{Q}\left(\sqrt[5]{3} + \zeta_5\right)$.

Esercizio 4. Sia dato $f(x) = x^4 + 30x^2 + 45 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia α una sua radice.

(a) Mostrare che $f(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

(b) Mostrare che il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ è $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(c) Determinare le immersioni di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$ e stabilire quali di esse sono automorfismi.

Esercizio 5. Sia data la funzione razionale

$$\alpha = \frac{x^2 - i}{x^3 + 1} \in \mathbb{C}(x).$$

(a) Dimostrare che α è trascendente su $\mathbb{C}$.

(b) Provare che x è algebrico su $\mathbb{C}(\alpha)$.

(c) Determinare il polinomio minimo di x su $\mathbb{C}(\alpha)$.

(d) Calcolare $[\mathbb{C}(x) : \mathbb{C}(\alpha)]$.