

Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
3 Ottobre 2013 - Esercitazione n.1
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Fattorizzare su \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 i seguenti polinomi:

- (i) $a(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 + 6x + 12$;
- (ii) $b(x) = x^5 + 3x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x - 6$;
- (iii) $c(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x - 4$;
- (iv) $d(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2x - 6$;
- (v) $f(x) = x^4 - x^2 - 1$;
- (vi) $g(x) = x^4 + 2x^2 + 4$;
- (vii) $h(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Esercizio 2. Provare che il polinomio

$$f(x) = \frac{27}{4}x^{100} + \frac{18}{3}x^{62} - 9x^{17} + \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}[x]$$

è irriducibile su \mathbb{Q} . Stabilire se il polinomio $g(x) = 12f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ è irriducibile su \mathbb{Z} .

Esercizio 3. Fattorizzare su \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} il polinomio

$$f(x) = 4x^6 - \frac{2}{3}x^5 - \frac{26}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{32}{3}x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Esercizio 4. Studiare al variare del parametro $a \in \mathbb{Z}$ la riducibilità del polinomio

$$f(x) = 3x^3 + 20ax^2 + 50a^2x + 60 \in \mathbb{Z}[x]$$

su \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} .

Esercizio 5. Fattorizzare su \mathbb{Z}_2 e su \mathbb{Z}_3 il polinomio $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 1$. Dedurne la fattorizzazione di $f(x)$ su \mathbb{Q} .

Esercizio 6. Fattorizzare su \mathbb{Z}_2 e su \mathbb{Z}_3 il polinomio $f(x) = x^5 + 7x^4 + 2x^3 + 6x^2 - x + 8$. Dedurne la fattorizzazione di $f(x)$ su \mathbb{Q} .

Esercizio 7. Sia $a \in \mathbb{Z}$ privo di fattori quadratici. Provare che per ogni $n \geq 1$ il polinomio $x^n - a$ è irriducibile su \mathbb{Q} . Cosa si può dire invece di $x^n + a$? E di $x^n + a^n x^{n-3} + a$, con $n > 3$?

Esercizio 8. Provare che il polinomio $f(x) = x^5 - x + 1$ è irriducibile su \mathbb{Q} .

Esercizio 9. Decomporre in fattori irriducibili di $\mathbb{C}[X, Y]$ i polinomi

(i) $f(X, Y) = X^4 - 1$;

(ii) $g(X, Y) = X^2 + Y^2 - 1$;

(iii) $h(X, Y) = -X^6 + X^3Y^2 - XY^3 + X^4Y$.

Esercizio 10. Esibire un polinomio di grado 2 ed uno di grado 3 a coefficienti interi, riducibili su \mathbb{Z} e senza radici intere.

Esercizio 11. Siano A un UFD ed X, Y indeterminate. Provare che un polinomio $f(X) \in A[X]$ è irriducibile in $A[X]$ se e solo se è irriducibile in $A[X, Y]$.

Esercizio 12. Provare che i seguenti polinomi in due variabili sono irriducibili in $\mathbb{Z}[X, Y]$, $\mathbb{Q}[X, Y]$, $\mathbb{R}[X, Y]$ e $\mathbb{C}[X, Y]$:

(i) $X^{10} + Y$;

(ii) $X^2 - Y^2 + 1$;

(iii) $X^2 + Y^2 + 1$;

(iv) $X + Y + 3$;

(v) $X^2 + Y^3$.

Esercizio 13. Fattorizzare i seguenti polinomi in due variabili in componenti irriducibili in $\mathbb{Z}[X, Y]$, $\mathbb{Q}[X, Y]$, $\mathbb{R}[X, Y]$ e $\mathbb{C}[X, Y]$:

(i) $X^2 + Y^2$;

(ii) $X^2 - Y^2$;

(iii) $X^2 + 2Y + Y^2 + 1$;

(iv) $X^3 + Y^3$;

(v) $Y^4 + 1$;

(vi) $X^2 + Y^2 - 2 + 2XY$;

(vii) $X^2 + Y^2 + 1 + 2Y$;

(viii) $X^4 + Y^4$.

Esercizio 14. Fattorizzare i seguenti polinomi in due variabili in componenti irriducibili in $\mathbb{Z}_2[X, Y]$ e $\mathbb{Z}_3[X, Y]$:

(i) $Y^2 + 2Y + Y^2 + 1$;

(ii) $X^3 + Y^3$

(iii) $X^2 + Y^2 - 2 + 2XY$

(iv) $X^2 + Y^2 + 1 + 2Y$.

Esercizio 15. Costruire un polinomio in due variabili (di grado positivo rispetto ad entrambe le variabili) che sia irriducibile in $\mathbb{Q}[X, Y]$ ma riducibile sia in $\mathbb{Z}[X, Y]$ che in $\mathbb{Z}_2[X, Y]$.