Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
10 Ottobre 2013 - Esercitazione n.2
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Sia dato il polinomio

$$f(x) = x^5 - x^3 - 6x - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Fattorizzare ciascuno degli anelli $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$, $\frac{\mathbb{R}[x]}{(f(x))}$, $\frac{\mathbb{C}[x]}{(f(x))}$ come prodotto di estensioni dei corrispondenti anelli dei coefficienti. Quale tra questi è campo? Quale integro?

Esercizio 2. Sia dato il polinomio

$$f(x) = x^4 + x^2 \in \mathbb{Q}[x].$$

Si dica se $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(f(x))}$ è isomorfo a $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$; in caso negativo esibire un rappresentante della sua classe di isomorfismo fornendo tutti i dettagli.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^3 + 2 \in \mathbb{Z}_3[x].$$

Decidere se nell'anello $\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(f(x))}$ la classe dell'elemento $g(x) = x$ ammette o no inverso. In caso affermativo determinarlo.

Esercizio 4. Al variare di $a \in \mathbb{Z}_7$ si consideri il polinomio

$$f_a(x) = a + x^2 + ax + 2 \in \mathbb{Z}_7[x].$$

Sia R_a l'insieme quoziente di $\mathbb{Z}_7[x]$ modulo $(f_a(x))$.

(i) Esplicitare l'insieme $A = \{a \in \mathbb{Z}_7 \mid x + 1 \text{ non è divisore di } f_a(x)\}$.

(ii) Posto $\psi_a = x + (f_a(x)) \in R_a$, si costruisca l'insieme B degli elementi $a \in \mathbb{Z}_7$ per cui $\psi_a + 1$ è invertibile in R_a.

(iii) Determinare espilcitamente l'inverso $\psi_0 + 1$.

(iv) Confrontare gli insiemi A e B e commentare il risultato ottenuto.

(v) Costruire l'insieme $C \subset \mathbb{Z}_7$ costituito dagli $a \in \mathbb{Z}_7$ per cui R_a è campo.

(vi) Costruire l'insieme $D \subset \mathbb{Z}_7$ costituito dagli $a \in \mathbb{Z}_7$ per cui R_a è dominio.

(vii) Confrontare gli insiemi C e D e commentare il risultato ottenuto.

(viii) Determinare, se esiste, un elemento non nullo e non invertibile di R_2.

(ix) Preso $a \in C$, provare che $f_a(x)$ si spezza linearmente in R_a.

(x) A partire da $f_1(x)$, costruire un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$ riducibile su $\mathbb{Z}$ ed irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 5. Dimostrare che $\frac{\mathbb{Z}[x]}{(x^2+1)} \simeq \mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 6. Si esibisca una base del campo numerico $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ e si dimostri che $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{9})$. Posto $\alpha = \sqrt[3]{3}$, portare in *forma canonica* gli elementi:

(a) α^{-1};

(b) $\alpha^{-2} + 2\alpha^{-1} + 3\alpha^4 - 5$;

(c) $\alpha^5 - \alpha^4 - \alpha^3 + 5\alpha^2 + 2\alpha + 2$;

(d) $\frac{1}{\alpha^2-7\alpha+4}$;

(e) $\frac{2\alpha^2+\alpha-3}{\alpha^2-\alpha}$.

Esercizio 7. Razionalizzare i seguenti numeri reali:

(a) $\frac{-2}{-2\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}+3}$;

(b) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}$;

(c) $\frac{\sqrt[5]{2}+7}{\sqrt[5]{16}-1+2\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{8}}$.

Esercizio 8. Per ciascuno dei seguenti numeri calcolare, se esiste, il polinomio minimo sui campi a fianco indicati:

(a) $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}$;

(b) $\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e $\mathbb{Q}$;

(c) $i\sqrt[4]{5}$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{5})$;

(d) π su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\pi^3)$;

(e) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2-i)$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$;

(f) $\cos 2\alpha$ su $\mathbb{Q}(\sin\alpha)$, $\mathbb{Q}(\cos\alpha)$ ed $\mathbb{R}$;

(g) π^3 su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\pi^2)$;

(h) $\sqrt[3]{7} - i$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{49})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$;

(i) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3-\sqrt{2}})$, $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$;

(j) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Esercizio 9 (Leibnitz)**.** Sia β una radice del polinomio $g(x) = x^4 + 1$. Mostrare che β ha grado 4 su $\mathbb{Q}$ ma ha grado 2 su $\mathbb{R}$. Fattorizzare $g(x)$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

Esercizio 10. Mostrare che se F è un qualsiasi campo numerico e d è un numero intero allora $F(\sqrt{d}) = F(a + b\sqrt{d}) = F(c\sqrt{d})$, per ogni $a,\ b,\ c \in F^*$.

Esercizio 11. Siano F un campo e β una radice del polinomnio

$$f(x) = x^5 - 9x^4 - 3x^2 + 3 \in F[x].$$

(a) Si studi l'irriducibilità di $f(x)$ su $F = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Z}_2$.

(b) Posto $F = \mathbb{Q}$, si dica se $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\beta^2)$.

(c) Si dimostri che β^2 è algebrico su $F = \mathbb{Q}$ e su $F = \mathbb{C}$.

(d) Si trovi il polinomio minimo di β^2 in entrambi i casi di cui al punto precedente.

(e) Si trovi il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\beta^2)$.

Esercizio 12. Descrivere esplicitamente gli elementi dei seguenti campi:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\ \sqrt{5})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7})$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{6},\ i)$;

(d) $\mathbb{Q}(\frac{\sqrt{3}}{8},\ 2\sqrt{3} - 41)$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3},\ \sqrt{5})$;

(f) $\mathbb{Q}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$;

(g) $\mathbb{Q}(i - \sqrt{5})$;

(h) $\mathbb{Q}(e,\ \sqrt{7})$;

(i) $\mathbb{Q}(\pi,\ \pi^2,\ 2\sqrt{8} - 6)$;

(j) $\mathbb{Q}(\sqrt{13},\ \sqrt{11},\ \log 2)$.

Esercizio 13. Calcolare i seguenti gradi di estensioni di campi:

(a) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}]$;

(b) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})]$;

(c) $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7} + i) : \mathbb{Q}]$;

(d) $[\mathbb{Q}(\pi,\ \sqrt[100]{5}) : \mathbb{Q}]$;

(e) $[\mathbb{Q}(\pi,\ \sqrt[101]{5}) : \mathbb{Q}(\pi)]$;

(f) $[\mathbb{Q}(\pi, \pi^2 - 3\pi + 1) : \mathbb{Q}(\pi^2)]$;

(g) $[\mathbb{Q}(\pi, \pi^2 - 3\pi + 1) : \mathbb{Q}(\pi)]$;

(h) $[\mathbb{Q}(e) : \mathbb{Q}(e^2)]$;

(i) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5-2\sqrt{3+\sqrt{7}}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(j) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{5-2\sqrt{3+\sqrt{7}}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{7})\right]$;

(k) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{5-2\sqrt{3+\sqrt{7}}}\right):\mathbb{Q}\left(\sqrt[4]{3+\sqrt{7}}\right)\right]$;

(l) $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(m) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2\sqrt{3}+1}-1}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{3})\right]$;

(n) $\left[\mathbb{Q}\left(\frac{i}{\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(o) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}-i,\ \frac{\sqrt{7}}{3}+9\right):\mathbb{Q}(\sqrt{7},\ i-2\sqrt{3})\right]$;

(p) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}\right]$;

(q) $\left[\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\right):\mathbb{Q}(\sqrt{6})\right]$.

Esercizio 14. Per ciascuno dei seguenti numeri calcolare il polinomio minimo sui campi a fianco indicati:

(a) $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e $\mathbb{Q}$;

(b) $\sqrt{3}-2\sqrt{7}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e $\mathbb{Q}$;

(c) $i\sqrt[4]{5}$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{5})$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[2]{5})$;

(d) π su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\pi^3)$;

(e) $\frac{\sqrt{2}}{2}(2-i)$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$;

(f) $\cos 2\alpha$ su $\mathbb{Q}(\sin\alpha)$, $\mathbb{Q}(\cos\alpha)$ ed $\mathbb{R}$;

(g) π^3 su $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\pi^2)$;

(h) $\sqrt[3]{7}-i$ su $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{49})$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$;

(i) $\sqrt[3]{2+\sqrt{3-\sqrt{2}}}$ su $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3-\sqrt{2}})$, $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$;

(j) $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Esercizio 15. Provare che il numero reale $\alpha=\pi^4+2\pi^3-\pi-2$ è trascendente su $\mathbb{Q}$. Determinare, se esiste, un'estensione dei campi $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(\pi)$ di grado minimo su cui α è algebrico.

Esercizio 16. Siano p e q due primi distinti. Dimostrare che le estensioni semplici $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ non sono isomorfe come campi. Cosa si può dire delle stesse strutture viste come $\mathbb{Q}$-spazi vettoriali?

Esercizio 17. Mostrare che $\mathbb{Q}(\sqrt[s]{2},\ \sqrt[t]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[s]{2}\sqrt[t]{3})$ per ogni $s,\ t \geqslant 2$ interi coprimi.

Esercizio 18. Mostrare che dati comunque $m,\ n \geqslant 2$ esiste $r \geqslant 2$ tale che $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{2},\ \sqrt[n]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[r]{2})$.

Esercizio 19. Siano F un campo ed $\alpha = \frac{x^3}{x-1} \in F(x)$. Mostrare che α è trascendente su F e che x è algebrico su $F(\alpha)$. Determinare il polinomio minimo di x su $F(\alpha)$ e $[F(x) : F(\alpha)]$.

Esercizio 20. Dire se $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt[3]{2}+1},\ \sqrt{3})$ è un'estensione biquadratica di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Esercizio 21. Stabilire se $\mathbb{Q}(i + \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

Esercizio 22. Sia $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Dimostrare che $\mathbb{C} = \mathbb{R}(a + ib)$. Dedurre che i polinomi di $\mathbb{R}[x]$ irriducibili su $\mathbb{R}$ hanno al più grado 2.

Esercizio 23. Esibire almeno due $\mathbb{Q}$-basi dell'estensione $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$. Determinare le matrici di passaggio da una base all'altra.

Esercizio 24. Siano $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt[3]{2}$ e $\gamma = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$.

(i) Provare con tutti i dettagli che $[\mathbb{Q}(\alpha,\ \beta) : \mathbb{Q}] = 6$;

(ii) Dimostrare che $\mathbb{Q}(\alpha,\ \beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$.

(iii) Calcolare $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$.

(iv) Calcolare $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}(\alpha)]$.

(v) Calcolare $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}(\beta)]$.

(vi) Determinare il polinomio minimo di $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ su $\mathbb{Q}$.

(vii) Determinare il polinomio minimo di γ su $\mathbb{Q}(\alpha)$ e $\mathbb{Q}(\beta)$.

(viii) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\beta)$.

(ix) Determinare il polinomio minimo di β su $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Esercizio 25. Sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi. Siano $\alpha,\ \beta \in K$ algebrici su F di gradi rispettivamente m ed n, tali che $\mathrm{MCD}(m,\ n) = 1$. Provare che:

(i) $[F(\alpha,\ \beta) : F] = mn$;

(ii) $F(\alpha) \cap F(\beta) = F$

(iii) $F(\alpha,\ \beta) = F(\alpha + \beta)$.

Siano $p(x)$ e $q(x)$ i polinomi minimi su F di α e β rispettivamente. Provare che:

(iv) $q(x)$ non ha radici in $F(\alpha)$ e che $p(x)$ non ha radici in $F(\beta)$;

(v) $q(x)$ è irriducibile su $F(\alpha)$ e che $p(x)$ è irriducibile su $F(\beta)$.

Determinare i polinomi minimi di α su $\mathbb{Q}(\beta)$ e di β su $\mathbb{Q}(\alpha)$.