Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
21 Ottobre 2013 - Esercitazione n.3
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Dire se $\mathbb{Q}(\sqrt{\sqrt[3]{2}+1}, \sqrt{3})$ è un'estensione biquadratica di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Esercizio 2 (Estensioni quadratiche in caratteristica 2)**.** Provare che il polinomio $p(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ è irriducibile su $\mathbb{Z}_2$. Costruire esplicitamente gli elementi del campo $K = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2+x+1)}$ e calcolare il suo grado su $\mathbb{Z}_2$. Calcolare i quadrati degli elementi di K e dedurre che in caratteristica 2 non vale la caratterizzazione data per le estensioni quadratiche in caratteristica diversa da 2.

Esercizio 3. Al variare di $n \in \mathbb{N}^*$, si consideri l'insieme $\mathbb{C}_n = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^n = 1\}$.

(i) Dimostrare che $\mathbb{C}_n$ è un sottogruppo di $\mathbb{C}$.

(ii) Provare che $\mathbb{C}_n$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. Dedurre che si tratta di un grupo ciclico e dire quali e quanti sono i suoi generatori.

(iii) Dimostrare che se $m \mid n$ allora $\mathbb{C}_m \subset \mathbb{C}_n$.

(iv) Siano $m, n \geqslant 1$ interi distinti. Dire se $\mathbb{C}_m \cup \mathbb{C}_n = \mathbb{C}_{mn}$.

Esercizio 4. Stabilire se $\mathbb{Q}(i + \sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

Esercizio 5. Sia $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Dimostrare che $\mathbb{C} = \mathbb{R}(a + ib)$. Dedurre che i polinomi di $\mathbb{R}[x]$ irriducibili su $\mathbb{R}$ hanno al più grado 2.

Esercizio 6. Siano p un numero primo e $k \geqslant 1$ un intero. Sia $F \subseteq K$ un'estensione di campi di grado p^k. Sia $f(x) \in F[x]$ un polinomio irriducibile su F di grado strettamente compreso tra 1 e p. Dimostrare che $f(x)$ non ha radici in K.

Esercizio 7. Sia F un campo. Si consideri il polinomio

$$f(x) = f_1(x)^{m_1} \cdot f_2(x)^{m_2} \cdots f_s(x)^{m_s} \in F[x]$$

decomposto canonicamente nel prodotto dei polinomi irriducibili $f_i(x) \in F[x]$. Dimostrare che $f(x)$ ed $f_{rid}(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_s(x)$ hanno lo stesso campo di spezzamento su F. Sia poi $g(x) \overset{\text{def}}{=} f_1(x)^{n_1} \cdot f_2(x)^{n_2} \cdots f_s(x)^{n_s}$, scelti come si voglia gli interi $n_1, n_2, \ldots, n_s \geqslant 1$. Provare che $f(x)$ e $g(x)$ hanno lo stesso campo di spezzamento su F.

Esercizio 8. Determinare il campo di spezzamento in $\mathbb{C}$ dei seguenti polinomi sul loro campo di definizione:

(a) $x^4 + 2x^2 + 9$;

(b) $x^3 - 1$;

(c) $x^3 + 1$;

(d) $x^4 - 2$;

(e) $x^4 - 2x^2 + 49$;

(f) $x^5 - 1$;

(g) $x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 9$;

(h) $x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 + \sqrt{5}x^3 - 3\sqrt{5}x^2 + 3\sqrt{5}x - \sqrt{5}$;

(i) $x^3 + 2ix^2 + x + 2i$;

(j) $x^3 - (6\sqrt{5} + 1)x^2 + (6\sqrt{5} + 47)x - 47$;

(k) $2x^3 - (2\sqrt{3} + 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x - \sqrt{3}$;

(l) $3x^7 - (4\sqrt{3} + 9)x^6 + (15 + 12\sqrt{3})x^5 - (21 + 16\sqrt{3})x^4 + (21 + 16\sqrt{3})x^3 - (15 + 12\sqrt{3})x^2 + (4\sqrt{3} + 9)x - 3$;

(m) $x^4 - 2x^2 + 3$;

(n) $x^4 - 5x^2 + 6$;

(o) $x^4 - 6x^2 + 1$;

(p) $x^4 - x^3 - 3x + 3$;

(q) $2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 7x^2 + 2x$;

(r) $x^6 - 3x^3 + 2$.

Esercizio 9. Determinare il grado su $\mathbb{Q}$ di ciascuno dei campi di spezzamento trovati nell'esercizio precedente.

Esercizio 10. Determinare tutti gli isomorfismi in $\mathbb{C}$ dei seguenti campi specificando quali tra essi sono automorfismi:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}})$;

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$;

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$;

(d) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$;

(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{11})$;

(f) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{7}, \sqrt{17}, \zeta_3)$.

Esercizio 11. Siano F un campo ed x una indeterminata su F. Dimostrare che se un elemento $f \in F(x)$ è algebrico su F allora è in F; calcolare il suo polinomio minimo su F.

Esercizio 12. Nel campo $\mathbb{C}$ siano A l'insieme delle radici primitive ottave dell'unità e B l'insieme delle radici quarte dell'unità negativa. Dimostrare che $A = B$.

Esercizio 13. Per ogni $1 \leqslant n \leqslant 20$ calcolare $\Phi_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Determinare l'$n$-simo ampliamento ciclotomico di $\mathbb{Q}$, il suo grado ed il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 14. Dimostrare che i polinomi ciclotomici sono reciproci. Determinarne la specie.

Esercizio 15. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 3$ $\Phi_n(x)$ ha grado pari.

Esercizio 16. Dimostrare che per ogni $n \geqslant 1$ $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$. Dimostrare che $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\zeta_6)$. Esplicitare $\mathbb{Q}(\zeta_4)$ e $\mathbb{Q}(\zeta_8)$. Dedurre che sebbene $\mathbb{Q}(\zeta_n) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$, tuttavia in generale non vale l'inclusione contraria.

Esercizio 17. Dimostrare che per ogni $m, n \geqslant 1$ tali che $m \mid n$ allora $\mathbb{Q}(\zeta_m) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$.

Esercizio 18. Dimostrare che per ogni n dispari $\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{2n})$.

Esercizio 19. Si dia un rappresentante per le classi di isomorfismo dei seguenti quozienti:

(a) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^{100}-1)}$;

(b) $\frac{\mathbb{C}[x]}{(\Phi_{100}(x))}$;

(c) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(\Phi_{100}(x))}$;

(d) $\frac{\mathbb{R}[x]}{(\Phi_{100}(x))}$;

(e) $\frac{\mathbb{Q}[x]}{(g(x))}$, $\frac{\mathbb{R}[x]}{(g(x))}$ e $\frac{\mathbb{C}[x]}{(g(x))}$, dove $g(x) = -\frac{5}{6} + \frac{5}{3}x^5 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{6}x^4$.

Esercizio 20. Calcolare $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ il polinomio minimo di $\alpha = \sqrt{7}$ su $\mathbb{Q}$. Determinare tutti i $\mathbb{Q}$ isomorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$. Quali tra questi sono automorfismi?

Esercizio 21. Calcolare $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ il polinomio minimo di $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ su $\mathbb{Q}$. Determinare tutti i $\mathbb{Q}$ isomorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$. Quali tra questi sono automorfismi?

Esercizio 22. Calcolare $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ il polinomio minimo di $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$. Determinare tutti i $\mathbb{Q}$ isomorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$. Quali tra questi sono automorfismi?

Esercizio 23. Sia ζ_n una radice n-sima primitiva dell'unità complessa. Determinare tutti i $\mathbb{Q}$ isomorfismi di $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ in $\mathbb{C}$. Quali tra questi sono automorfismi?

Esercizio 24. Calcolare $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ il polinomio minimo di $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ su $\mathbb{Q}$. Determinare tutti i $\mathbb{Q}$ isomorfismi di $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{C}$. Quali tra questi sono automorfismi?