Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
27 Novembre 2013 - Esercitazione n.5
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Siano $n \geqslant 3$ e G un sottogruppo di S_n. Provare che:

(i) Se G contiene tutte le trasposizioni di S_n allora $G = S_n$.

(ii) Se G contiene tutte le trasposizioni di S_n di tipo (ik), con k fissato ed $i \neq k$, allora $G = S_n$.

(iii) Se $(1\,2\,\ldots\,n) \in G$ ed $(12) \in G$, allora $G = S_n$.

Esercizio 2. Sia p un numero primo dispari. Sia $f(X) \in Q[x]$ un polinomio irriducibile di grado p. Se $f(x)$ ha esattamente 2 radici complesse non reali, allora $\mathfrak{Gal}_{\mathbb{Q}}(f(x)) \simeq S_p$.

Esercizio 3. Calcolare il numero di radici reali dei seguenti polinomi:

(i) $x^8 + 10x^3 + x - 4$;

(ii) $x^5 - 3x - 1$.

Esercizio 4. Calcolare il gruppo di Galois dei seguenti polinomi:

(i) $x^3 - 2$;

(ii) $x^5 + 5x^4 - 5$;

(iii) $x^5 - 3x - 1$;

(iv) $x^5 + px^2 - px - p$, con p numero primo.

Esercizio 5. Dato il polinomio $f(X) = x^3 - x^2 - 2x$, calcolare il polinomio $f_k(x)$ che ha per radici le potenze k-sime delle radici di $f(x)$, per $k = -2, -1, 2, 3$.

Esercizio 6. Sia dato il polinomio biquadratico irriducibile

$$f(x) = x^4 + ax^2 + c \in \mathbb{Q}[x].$$

Sia $G \subseteq S_4$ il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$. Provare che:

(i) $G = V_4$ se e solo se $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$;

(ii) G è ciclico di ordine 4 se e solo se $\sqrt{tc} \in \mathbb{Q}$;

(iii) $G \simeq D_4$ se e solo se $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$ e $\sqrt{tc} \notin \mathbb{Q}$.