Università degli Studi Roma Tre
Corso di laurea in Matematica A.A. 2013-2014
AL310 - Istituzioni di Algebra Superiore
12 Dicembre 2013 - Esercitazione n.6
Antonio Cigliola

Esercizio 1. Risolvere i seguenti sistemi simmetrici:

(i) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 9 \end{cases}$

Esercizio 2. Sia S un sistema simmetrico di n equazioni in n incognite a coefficienti in un campo F. Dimostrare che se l'n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è una soluzione di S, allora per ogni $\sigma \in S_n$ anche $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ è una soluzione di S. Dedurne che l'insieme delle soluzioni di un sistema simmetrico è invariante sotto l'azione di S_n.

Esercizio 3. Sia S un sistema simmetrico di n equazioni in n incognite a coefficienti in F. Sia K un campo di spezzamento di F. Dimostrare che il numero delle soluzioni di S in K è al più $n!$. Dimostrare inoltre che il numero delle soluzioni è un divisore di $n!$. Fornire un esempio di un sistema simmetrico di n equazioni in n incognite che ammette meno di $n!$ soluzioni.

Esercizio 4. Esplicitare la corrispondenza di Galois per l'estensione

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3}).$$

Esercizio 5. Verificare che i sottogruppi transitivi di S_5 sono (opportune copie isomorfe di):

$$S_5, \quad A_5, \quad M_5, \quad D_5, \quad \mathbb{Z}_5.$$

Distinguere quelli risolubili da quelli non risolubili.

Esercizio 6. Costruire un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}(x)$ di grado 5 irriducibile su $\mathbb{Q}$ tale che il suo gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ sia:

(i) $\mathbb{Z}_5$

(ii) D_5

(iii) M_5

(iv) A_5

(v) S_5