Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Richiami di Teoria dei Gruppi

1. Determinare il reticolo dei sottogruppi dei gruppi:
$$\mathbb{Z}_{12}\,; \quad \mathcal{U}(\mathbb{Z}_{12})\,;$$
$$\Delta_4 \text{ (gruppo diedrale di grado 4)}\,; \quad \Delta_5 \text{ (gruppo diedrale di grado 5)}\,;$$
$$\mathbf{S_3}\,;\ \mathbf{S_4}\,;\ \mathbf{H} \text{ (gruppo delle unità dei quaternioni)}.$$
Determinare inoltre quali sottogruppi sono normali.

2. Mostrare che $\mathbf{S_n}$ è generato da uno qualsiasi dei seguenti insiemi:
$$\{(a,b)\,; 1 \leq a, b \leq n\}\,; \quad \{(1,b)\,; 1 \leq b \leq n\}; \quad \{\tau, \gamma\}$$
dove $\tau = (12)$ e $\gamma = (12\ldots n)$.

3. Scrivere le seguenti permutazioni di $\mathbf{S_9}$ come prodotto di cicli disgiunti. Determinarne inoltre l'ordine e la parità:
$$(143)(2531)(24)\,; \quad (176)(914)\,; \quad (23)(21)(24)\,;$$
$$(13579)(2468)\,; \quad (1653)(4368)(879)\,; \quad (13)(1435)(7986)(123)\,.$$

4. Mostrare che, se H è un sottogruppo di $\mathbf{S_n}$ che contiene una permutazione dispari, allora esattamente la metà delle permutazioni di H sono dispari (in particolare l'ordine di H è pari).

5. Mostrare che se $\pi \in \mathbf{S_n}$ e $\gamma = (a_1, a_2, , a_r)$ è un r-ciclo, allora
$$\pi^{-1}\gamma\pi := \pi \circ \gamma \circ \pi^{-1} = (\pi(a_1), \pi(a_2), \ldots, \pi(a_r)).$$
Dedurne che tutti gli r-cicli sono coniugati in $\mathbf{S_n}$.

6. Determinare le classi coniugate di $\mathbf{S_4}$.

7. Siano $\alpha\,, \tau \in I \subseteq \mathbf{S_9}$ con
$$I = \{(13564), (45)(842)(793), (34)(867), (36578)(1429), (13)(76)(47)\}.$$
Determinare $\tau^{-1}\alpha\tau$.

8. Determinare (*se esiste*) $\tau \in \mathbf{S_9}$ tale che $\beta = \tau^{-1}\alpha\tau$ quando:

   (a) $\alpha = (1357)\,, \quad \beta = (2468);$

   (b) $\alpha = (12)(5389)\,, \quad \beta = (35)(1476);$

(c) $\alpha = (12)(34)(67)\,, \quad \beta = (23)(46)(17)$;

(d) $\alpha = (4657)(98123)\,, \quad \beta = (5746)(123)(89)$;

(e) $\alpha = (123456789)\,, \quad \beta = (675983241)$.

9. Mostrare che i 5-cicli si ripartiscono in due classi coniugate di $\mathbf{A_5}$ (benché essi siano tutti coniugati in $\mathbf{S_5}$).

10. Identificare Δ_4 ad un sottogruppo di $\mathbf{S_4}$ e determinare due elementi di Δ_4 che sono coniugati in $\mathbf{S_4}$ ma non in Δ_4.

11. Sia G un gruppo e siano $H\,, K$ sottogruppi di G. Mostrare che:

    (a) $HK := \{hk\,; h \in H\,, k \in K\}$ è un sottogruppo di G se e soltanto se $HK = KH$;

    (b) Se H è normale in G, allora $\langle H \cup K \rangle = HK$;

    (c) $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.

    Usando questi fatti, dimostrare poi che:

    (d) Se $F \subseteq K$ è un ampliamento di Galois e $L\,, M$ sono due campi intermedi normali su F, allora

    $$\mathrm{Gal}_{L\cap M}(K) = \mathrm{Gal}_L(K)\,\mathrm{Gal}_M(K) =: \{\varphi\psi\,; \varphi \in \mathrm{Gal}_L(K)\,, \psi \in \mathrm{Gal}_M(K)\};$$

    se inoltre $LM = K$, allora tale prodotto è un prodotto diretto di gruppi.

12. Siano G un gruppo, H un sottogruppo di G e si consideri l'insieme $N := \{g \in G; gHg^{-1} = H\}$.

    Mostrare che:

    (a) N è un sottogruppo di G;

    (b) H è un sottogruppo normale di N;

    (c) Se K è un sottogruppo di G e H è normale in K, allora $K \subseteq N$;

    (d) H è normale in G se e soltanto se $N = G$.

    Il gruppo N si dice il *normalizzante* di H in G.

13. Mostrare che:

    (a) Se $H := \{(1), (12), (34), (12)(34)\} \subseteq \mathbf{S}_4$, allora il normalizzante di H in $\mathbf{S}_4$ è il sottogruppo di ordine 8 generato da $(34), (1324)$.

(b) Se $H := \mathbf{V}_4 := \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq \mathbf{S}_4$, allora il normalizzante di H in $\mathbf{S}_4$ è $\mathbf{S}_4$ stesso.

(c) Se $H := \{(1), (123), (132)\} \subseteq \mathbf{A}_4 \subseteq \mathbf{S}_4$, allora il normalizzante di H in $\mathbf{A}_4$ è H stesso, mentre il normalizzante di H in $\mathbf{S}_4$ è il sottogruppo $N := \{(1), (123), (132), (12), (13), (24)\}$.

14. Sia $M \subseteq \mathbf{S_5}$ il sottogruppo generato dai cicli $\gamma := (12345)$ ed $\eta := (2354)$. Mostrare che M è il normalizzante di $\langle\gamma\rangle$ in $\mathbf{S}_5$. Dedurne che $M = \{\gamma^i\eta^j\}$ ha 20 elementi. M si dice il *gruppo metaciclico* di grado 5.

15. Sia G un gruppo, comunque scelti $a, b \in G$, poniamo
$$[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab.$$
L'elemento $[a, b]$ si dice il *commutatore* di a e b ed il sottogruppo G' di G generato da tutti i commutatori, si dice il sottogruppo *derivato* di G. Mostrare che:

    (a) $G' = \{e\}$ se e soltanto se G è abeliano;
    (b) G' è un sottogruppo caratteristico (e quindi normale) di G ;
    (c) G/G' è abeliano;
    (d) Se N è un sottogruppo normale di G e G/N è abeliano, allora $G' \subseteq N$;
    (e) Se H è un sottogruppo di G tale che $G' \subseteq H$, allora H è normale;
    (f) Se $Z := Z(G)$ è il centro di G e $\{a_i : i \in I\}$ è un insieme di rappresentanti delle classi laterali di Z in G , allora G' è generato da $\{[a_i, a_j] : i, j \in I\}$.

16. Sia G un gruppo. Poniamo $G(0) := G$ e, per ogni $k \geq 1$, indichiamo con $G(k)$ il derivato di $G(k-1)$. La catena di sottogruppi di G
$$G(0) := G \supseteq G(1) := G' \supseteq \ldots \supseteq G(k) \supseteq \ldots$$
si dice la *serie derivata* di G .

    Usando le proprietà elencate nell'esercizio precedente, determinare la serie derivata dei gruppi:
$$\Delta_4\ ;\ \Delta_5\ ;\ \mathbf{S_3}\,;\ \mathbf{S_4}\,;\ \mathbf{H}.$$