

Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2013/2014
AL310 - Teoria di Galois (prof. Gabelli)
Richiami sui polinomi

1. Sia A un dominio di integrità. Dimostrare che il polinomio $p(X) \in A[X]$ è irriducibile su A se e soltanto se lo è ogni suo polinomio associato.
2. Sia $f(X)$ uno dei seguenti polinomi:
 $21X$; $21X + 7$; $6X^2 - 5X + 1$; $6X^3 - 7X^2 - X + 2$.
Determinare esplicitamente tutti i divisori di $f(X)$ in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$ e ripartirli in classi di polinomi associati (in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$).
3. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false in $\mathbb{Z}[X]$ e $\mathbb{Q}[X]$.
 - (a) $3X$ divide $7X^2$;
 - (b) $X - 3$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$;
 - (c) $3(X - 3)$ divide $X^3 - 3X^2 + X - 3$.
4. Mostrare che il polinomio $\bar{2}X^3 + \bar{2}X + \bar{3}$ è invertibile in $\mathbb{Z}_8[X]$, determinando esplicitamente un suo inverso.
5. Utilizzando l'Algoritmo Euclideo della divisione, determinare il massimo comune divisore monico delle seguenti coppie di polinomi ed una identità di Bezout per esso:
 $f(X) := X^5 + \bar{1}$; $g(X) := \bar{3}X^3 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$;
 $f(X) := X^5 - \frac{1}{3}X^4 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{6}$; $g(X) := X^3 + \frac{2}{3}X^2 + \frac{2}{3}X - \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}[X]$.
6. Sia $f(X) := 7X^7 + 6X^6 + 5X^5 + 4X^4 + 3X^3 + 2X^2 + X + 1$.
Applicare il Teorema del Resto per calcolare $f(2)$.
7. Stabilire se i seguenti polinomi hanno radici razionali e in caso affermativo determinarle esplicitamente.
 $3X^5 + 3X^4 - 14X^3 - 5X^2 - 5X - 2$; $X^5 - 2X^3 + X^2 - 8X - 4$.
8. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili di $\mathbb{Q}[X]$:
 $5X^4 - 6X^2 + 2$; $X^4 - 3X^3 + X^2 - 2X - 3$; $6X^4 - 7X^3 + 8X^2 - 7X + 2$.

9. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_5[X]$:
 $\bar{3}X^2 + \bar{2}X + \bar{2}$; $X^3 + \bar{3}X^2 + \bar{3}X + \bar{2}$; $X^4 + \bar{2}X^3 + \bar{2}X^2 + \bar{2}X + \bar{1}$.
10. Stabilire se i seguenti polinomi hanno radici multiple:
 $X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$; $X^4 + X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{Z}[X]$
 $X^3 + \bar{3}X^2 + \bar{1}$; $X^{10} + \bar{3}X^5 + \bar{1} \in \mathbb{Z}_5[X]$
11. Determinare le radici complesse dei polinomi
 $X^2 - (2 + 3i)$; $3X^3 + (1 + i)$.
12. Stabilire se i seguenti polinomi sono irriducibili rispettivamente in $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$:
 $21X + 3$; $X^2 + X + 3$; $X^3 - 1$; $2X^4 + 5X^2 + 2$.
13. Scomporre i seguenti polinomi in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[X]$ e $\mathbb{C}[X]$:
 $X^4 + 1$; $X^5 - 1$; $X^6 - 1$; $X^6 - 8$.
14. Usando il criterio di irriducibilità di Eisenstein, mostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili su \mathbb{Q} :
 $X^{35} - 25X^{12} + 10X^7 - 15$; $33X^{123} + 6X^{21} + 1$.
15. Dare un esempio di polinomio irriducibile su \mathbb{Q} che non soddisfa il criterio di irriducibilità di Eisenstein.
16. Usando il criterio di irriducibilità modulo p , mostrare che i seguenti polinomi sono irriducibili su \mathbb{Q} :
 $49X^2 + 35X + 11$; $124X^3 - 119X^2 + 35X + 64$; $X^5 - 4$.